中五数学延伸单元一

中五　数学延伸单元一　|　时限：75 分钟　|　总分：100 分　|　共 24 题

甲部　二项式定理（16 分）

回答下列各题，并列出计算步骤。

1. 求 (1 + 2x)^7 展开式中 x^3 的系数，并写出该项。

答案：系数 = C(7,3) × 2^3 = 35 × 8 = 280，该项为 $280x^3$。

2. 求 $(x + 2/x^2)^6$ 展开式中的常数项。

答案：通项 = C(6,r) x^(6−r) $(2x^{-2})^r$ = C(6,r) 2^r x^(6−3r)；令 6 − 3r = 0 得 r = 2，常数项 = C(6,2) × 2^2 = 15 × 4 = 60。

3. 求 (3 − x)^8 展开式各项系数之和，并指出应代入哪个 x 值。

答案：系数和 = 把 x 代 1 得 (3 − 1)^8 = 2^8 = 256。

4. (2 + x)^12 的展开式共有多少项？并求中间项的系数。

答案：共 13 项；中间项为第 7 项，系数 = C(12,6) = 924。

乙部　指数与对数（16 分）

全部答案须列出步骤，数值答案取指定准确度。

5. 求 $\log_9 27$ 的值，并以分数表示。

答案：$\log_9 27 = \log_3 27 \div \log_3 9 = 3 \div 2 = 1.5$（即 3/2）。

6. 解方程 2^x = 5，答案取四位小数。

答案：$x = \log_2 5 = \ln 5 \div \ln 2 = 2.3219$。

7. 某放射性物质半衰期为 8 年，最初质量 640 g。(a) 求 24 年后的质量；(b) 求质量降至 40 g 所需年数。

答案：(a) 640 × (1/2)^(24÷8) = 640 × 1/8 = 80 g；(b) 640 ÷ 40 = 16 = 2^4，需 4 × 8 = 32 年。

8. 某溶液氢离子浓度 $[H^+] = 2.5 \times 10^{-5}$ mol/L，求其 pH（一位小数）。

答案：$pH = -\log(2.5 \times 10^{-5}) = 5 - \log 2.5 = 5 - 0.398 = 4.6$。

丙部　极限与导数（16 分）

须写出求导法则，答案可为准确值或指定小数。

9. 求 $\lim_{x \to 3} (x^2 - 9) / (x - 3)$。

答案：分子分解为 (x − 3)(x + 3)，约去 (x − 3) 后得 lim(x + 3) = 6。

10. 设 $y = x^2 e^{3x}$，求 dy/dx 在 x = 1 的值（准确值及三位小数）。

答案：用乘积法则：$dy/dx = e^{3x}(2x + 3x^2)$；x = 1 得 $5e^3 \approx 100.428$。

11. 设 $y = \ln(3x^2 + 1)$，求 dy/dx 在 $x = 2$ 的值（以分数表示）。

答案：$dy/dx = 6x \div (3x^2 + 1)$；$x = 2$ 得 $12 \div 13 \approx 0.923$。

12. 设 $y = \sqrt{(2x + 5)}$，用链式法则求 dy/dx 在 $x = 2$ 的值。

答案：y = (2x + 5)^(1/2)，$dy/dx = 1 \div \sqrt{(2x + 5)}$；$x = 2$ 得 $1 \div 3 \approx 0.333$。

丁部　微分应用（16 分）

须指出所用条件，并以二阶导数或表格判断极值性质。

13. 曲线 $y = x^3 - 2x$，求 $x = 1$ 处的切线方程。

答案：$y' = 3x^2 - 2$，$x = 1$ 时斜率 $= 3 - 2 = 1$；切点 $(1, -1)$；切线 $y = x - 2$。

14. 曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 4$，求所有驻点，并判断其为极大或极小。

答案：$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$，驻点 $x = 0$ 及 $x = 2$；$y'' = 6x - 6$，$x = 0$ 时 $y'' = -6 < 0$ 为极大 $(0, 4)$，$x = 2$ 时 $y'' = 6 > 0$ 为极小 $(2, 0)$。

15. 长方形周界固定为 40 cm，求其最大面积及对应的边长。

答案：设一边为 a，另一边为 $20 - a$，面积 $A = a(20 - a)$；$A' = 20 - 2a = 0$ 得 $a = 10$，最大面积 $= 100\ \text{cm}^2$（正方形 10×10）。

16. 球体半径以 0.5 cm/s 增加，求半径为 3 cm 时体积的增加率（准确值及三位小数）。

答案：$V = (4/3)\pi r^3$，$dV/dt = 4\pi r^2(dr/dt) = 4\pi(9)(0.5) = 18\pi \approx 56.549\ \text{cm}^3/\text{s}$。

戊部　积分与面积（16 分）

须写出原函数或所用公式，答案可为准确值。

17. 计算 $\int_0^2 (3x^2 + 2x)\,dx$。

答案：原函数 $x^3 + x^2$，代入上下限得 $(8 + 4) - 0 = 12$。

18. 求曲线 $y = x$ 与 $y = x^2$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 之间所围的面积。

答案：在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上 $x \geqslant x^2$，面积 $= \int_0^1 (x - x^2)\,dx = 1/2 - 1/3 = 1/6 \approx 0.167$。

19. 计算 $\int_1$ ^e (1/x) dx。

答案：原函数 ln x，代入得 ln e − ln 1 = 1 − 0 = 1。

20. 曲线 $y = x^2$ 由 $x = 0$ 至 $x = 1$ 绕 x 轴旋转，求旋转体的体积（以 π 表示及三位小数）。

答案：$V = \pi \int_0^1 (x^2)^2\,dx = \pi[x^5/5]_0^1 = \pi/5 \approx 0.628$。

己部　概率与分布（20 分）

须写出所用分布、公式及代入的数值。

21. $X \sim B(10, 0.3)$，求 $P(X = 3)$（四位小数）。

答案：$P(X = 3) = C(10,3)(0.3)^3(0.7)^7 = 120 \times 0.027 \times 0.0823543 \approx 0.2668$。

22. $X \sim B(20, 0.3)$，求期望值、方差及标准差（标准差取三位小数）。

答案： $E(X) = np = 6$；$\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 20 \times 0.3 \times 0.7 = 4.2$；标准差 $= \sqrt{4.2} \approx 2.049$。

23. $X \sim N(50, 8^2)$，求 $P(X > 62)$（四位小数）。

答案： $z = (62 - 50) \div 8 = 1.5$；$P(X > 62) = P(Z > 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$。

24. $X \sim N(50, 8^2)$，求 $P(42 < X < 58)$（四位小数），并说明与 68% 经验法则的关系。

答案： $z = (42 - 50) \div 8 = -1$，$z = (58 - 50) \div 8 = 1$；$P = 0.6827$，即约 68%，与 $\mu \pm 1\sigma$ 的经验法则一致。

TutorZone 中五数学延伸单元一练习卷｜题目与文章为原创，并非任何学校或出版社的教材。