中五數學延伸單元一

中五　數學延伸單元一　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

甲部　二項式定理（16 分）

回答下列各題，並列出計算步驟。

1. 求 (1 + 2x)^7 展開式中 x^3 的係數，並寫出該項。

答案：係數 = C(7,3) × 2^3 = 35 × 8 = 280，該項為 $280x^3$。

2. 求 $(x + 2/x^2)^6$ 展開式中的常數項。

答案：通項 = C(6,r) x^{6-r} $(2x^{-2})^r$ = C(6,r) 2^r x^{6-3r}；令 6 − 3r = 0 得 r = 2，常數項 = C(6,2) × 2^2 = 15 × 4 = 60。

3. 求 $(3 - x)^8$ 展開式各項係數之和，並指出應代入哪個 x 值。

答案：係數和 = 把 x 代 1 得 $(3 - 1)^8 = 2^8 = 256$。

4. $(2 + x)^{12}$ 的展開式共有多少項？並求中間項的係數。

答案：共 13 項；中間項為第 7 項，係數 = C(12,6) = 924。

乙部　指數與對數（16 分）

全部答案須列出步驟，數值答案取指定準確度。

5. 求 $\log_9 27$ 的值，並以分數表示。

答案：$\log_9 27 = \log_3 27 \div \log_3 9 = 3 \div 2 = 1.5$（即 3/2）。

6. 解方程 $2^x = 5$，答案取四位小數。

答案：$x = \log_2 5 = \ln 5 \div \ln 2 = 2.3219$。

7. 某放射性物質半衰期為 8 年，最初質量 640 g。(a) 求 24 年後的質量；(b) 求質量降至 40 g 所需年數。

答案：(a) 640 × $(1/2)^{(24\div 8)}$ = 640 × 1/8 = 80 g；(b) 640 ÷ 40 = 16 = 2^4，需 4 × 8 = 32 年。

8. 某溶液氫離子濃度 $[H^+] = 2.5 \times 10^{-5}$ mol/L，求其 pH（一位小數）。

答案：$pH = -\log(2.5 \times 10^{-5}) = 5 - \log 2.5 = 5 - 0.398 = 4.6$。

丙部　極限與導數（16 分）

須寫出求導法則，答案可為準確值或指定小數。

9. 求 $\lim_{x\to 3} (x^2 - 9) / (x - 3)$。

答案：分子分解為 (x − 3)(x + 3)，約去 (x − 3) 後得 lim(x + 3) = 6。

10. 設 $y = x^2 e^{3x}$，求 dy/dx 在 x = 1 的值（準確值及三位小數）。

答案：用乘積法則：$dy/dx = e^{3x}(2x + 3x^2)$；x = 1 得 $5e^3 \approx 100.428$。

11. 設 $y = \ln(3x^2 + 1)$，求 dy/dx 在 $x = 2$ 的值（以分數表示）。

答案：$dy/dx = 6x \div (3x^2 + 1)$；$x = 2$ 得 $12 \div 13 \approx 0.923$。

12. 設 $y = \sqrt{(2x + 5)}$，用鏈式法則求 dy/dx 在 $x = 2$ 的值。

答案：y = (2x + 5)^(1/2)，$dy/dx = 1 \div \sqrt{(2x + 5)}$；$x = 2$ 得 $1 \div 3 \approx 0.333$。

丁部　微分應用（16 分）

須指出所用條件，並以二階導數或表格判斷極值性質。

13. 曲線 $y = x^3 - 2x$，求 $x = 1$ 處的切線方程。

答案：$y' = 3x^2 - 2$，$x = 1$ 時斜率 $= 3 - 2 = 1$；切點 $(1, -1)$；切線 $y = x - 2$。

14. 曲線 $y = x^3 - 3x^2 + 4$，求所有駐點，並判斷其為極大或極小。

答案：$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$，駐點 $x = 0$ 及 $x = 2$；$y'' = 6x - 6$，$x = 0$ 時 $y'' = -6 < 0$ 為極大 $(0, 4)$，$x = 2$ 時 $y'' = 6 > 0$ 為極小 $(2, 0)$。

15. 長方形周界固定為 40 cm，求其最大面積及對應的邊長。

答案：設一邊為 a，另一邊為 $20 - a$，面積 $A = a(20 - a)$；$A' = 20 - 2a = 0$ 得 $a = 10$，最大面積 $= 100\ \text{cm}^2$（正方形 10×10）。

16. 球體半徑以 0.5 cm/s 增加，求半徑為 3 cm 時體積的增加率（準確值及三位小數）。

答案：$V = (4/3)\pi r^3$，$dV/dt = 4\pi r^2(dr/dt) = 4\pi(9)(0.5) = 18\pi \approx 56.549\ \text{cm}^3/\text{s}$。

戊部　積分與面積（16 分）

須寫出原函數或所用公式，答案可為準確值。

17. 計算 $\int_0^{\ 2} (3x^2 + 2x)\,dx$。

答案：原函數 $x^3 + x^2$，代入上下限得 $(8 + 4) - 0 = 12$。

18. 求曲線 $y = x$ 與 $y = x^2$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 之間所圍的面積。

答案：在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上 $x \geqslant x^2$，面積 $= \int_0^{\ 1} (x - x^2)\,dx = 1/2 - 1/3 = 1/6 \approx 0.167$。

19. 計算 $\int_1^{\ } \text{^e}\,(1/x)\,dx$。

答案：原函數 $\ln x$，代入得 $\ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$。

20. 曲線 $y = x^2$ 由 $x = 0$ 至 $x = 1$ 繞 x 軸旋轉，求旋轉體的體積（以 π 表示及三位小數）。

答案：$V = \pi \int_0^{\ 1} (x^2)^2\,dx = \pi[x^5\ /5]_0^{\ 1} = \pi/5 \approx 0.628$。

己部　概率與分佈（20 分）

須寫出所用分佈、公式及代入的數值。

21. $X \sim B(10, 0.3)$，求 $P(X = 3)$（四位小數）。

答案：$P(X = 3) = C(10,3)(0.3)^3(0.7)^7\ = 120 \times 0.027 \times 0.0823543 \approx 0.2668$。

22. $X \sim B(20, 0.3)$，求期望值、方差及標準差（標準差取三位小數）。

答案：$E(X) = np = 6$；$\text{Var}(X) = np(1-p) = 20 \times 0.3 \times 0.7 = 4.2$；標準差 $= \sqrt{4.2} \approx 2.049$。

23. $X \sim N(50, 8^2)$，求 $P(X > 62)$（四位小數）。

答案：$z = (62 - 50) \div 8 = 1.5$；$P(X > 62) = P(Z > 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$。

24. $X \sim N(50, 8^2)$，求 $P(42 < X < 58)$（四位小數），並說明與 68% 經驗法則的關係。

答案：$z = (42 - 50) \div 8 = -1$，$z = (58 - 50) \div 8 = 1$；$P = 0.6827$，即約 68%，與 $\mu \pm 1\sigma$ 的經驗法則一致。

TutorZone 中五數學延伸單元一練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。