中五數學延伸部分單元二練習卷：歸納法、二項式定理、數列極限、微分與積分

S5　數學延伸部分單元二　｜　時限：60 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 21 題

甲部　數學歸納法

本部分共 3 題，合計 16 分，全部須作答。

1. 用數學歸納法證明：對所有正整數 n，$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$。

答案：答案：當 n = 1，左邊 = 1、右邊 = 1×2×3/6 = 1，基礎步成立。假設 n = k 時成立，即前 k 項平方和 = k(k+1)(2k+1)/6；則 n = k+1 時，和 = k(k+1)(2k+1)/6 + $(k+1)^2$ = (k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]/6 = (k+1)($2k^2$ + 7k + 6)/6 = (k+1)(k+2)(2k+3)/6，正是 n = k+1 的形式。由數學歸納法原理，命題對所有正整數成立。（評分：基礎步 2 分、歸納假設 2 分、代數整理 2 分、結論 2 分）

2. 利用 (a) 的結果，求 $1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2$ 的值。

答案：答案：前 20 項平方和 = 20×21×41/6 = 17220/6 = 2870。（評分：代入公式 2 分、數值 2 分）

3. 用數學歸納法證明：對所有正整數 n，3^(2n) − 1 可被 8 整除。

答案：答案：n = 1 時 $3^2 - 1 = 8$，可被 8 整除。假設 n = k 時成立，即 3^(2k) − 1 = 8m；則 n = k+1 時，3^(2k+2) − 1 = 9×3^(2k) − 1 = 9(8m + 1) − 1 = 72m + 8 = 8(9m + 1)，仍可被 8 整除。由歸納法原理，命題對所有正整數成立。（評分：基礎步 1 分、歸納步 2 分、結論 1 分）

乙部　二項式定理

本部分共 3 題，合計 18 分，全部須作答。

4. 展開 (2x − 3)^5，並寫出 x^3 項與常數項。

答案：答案：一般項為 C(5,r)(2x)^r(−3)^(5−r)。r = 3 時得 C(5,3)×2^3×$(-3)^2$ = 10×8×9 = 720，即 720x^3；r = 0 時常數項 = (−3)^5 = −243。故 (2x − 3)^5 = 32x^5 − 240x^4 + 720x^3 − 1080x^2 + 810x − 243。（評分：一般項 2 分、x^3 項 2 分、常數項 1 分、完整展開 1 分）

5. 求 $(x^2 + 2/x)^9$ 展開式中獨立於 x 的項。

答案：答案：一般項 = C(9,r)$(x^2)^{(9-r)}$(2/x)^r = C(9,r)2^r x^(18−3r)。令 18 − 3r = 0 得 r = 6，故該項 = C(9,6)×2^6 = 84×64 = 5376。（評分：一般項 2 分、定出 r 2 分、數值 2 分）

6. 求 (1 + x)^6 (1 − x)^6 展開式中 x^4　項。

答案：答案：(1 + x)^6(1 − x)^6 = $(1 - x^2)^6$，一般項為 C(6,r)$(-x^2)^r$。x^4　對應 r = 2，故該項 = C(6,2)$(-1)^2x^4$　= 15x^4　。（評分：化簡為單一二項式 2 分、定出 r 2 分、x^4　項 2 分）

丙部　數列極限與無窮級數

本部分共 4 題，合計 16 分，全部須作答。

7. 求 $\lim_{n\to\infty}(3n^2+2n-1)/(2n^2-5)$。

答案：答案：分子分母同除以 n^2，得 $(3+2/n-1/n^2)/(2-5/n^2)$。當 n 趨向無窮，$2/n$ 與 $1/n^2$、$5/n^2$ 均趨向 0，故極限 $= 3/2$。（評分：同除 n^2 2 分、極限值 2 分）

8. 求 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{(n^2+4n)}-n)$。

答案：答案：分子分母同乘共軛式 $\sqrt{(n^2+4n)}+n$，得 $4n/(\sqrt{(n^2+4n)}+n)$，再上下同除 n 得 $4/(\sqrt{(1+4/n)}+1)$。當 n 趨向無窮，該式趨向 $4/(1+1)=2$。（評分：共軛處理 2 分、化簡與極限 2 分）

9. 求無窮級數 $\Sigma_{r=1}^{\infty}(3/4)^r$ 的和。

答案：答案：首項 $a=3/4$、公比 $r=3/4$，公比的絕對值少於 1，故級數收斂，和 $= a/(1-r)=(3/4)/(1/4)=3$。（評分：辨認等比 2 分、求和公式與結果 2 分）

10. 求無窮級數 $\Sigma_{r=1}^{\infty} r/2^r$ 的和。

答案：答案：設 $S=\Sigma\, r/2^r$，則 $S-S/2=\Sigma\,(r-(r-1))/2^r=\Sigma\,1/2^r=1$，故 $S/2=1$、$S=2$。（評分：錯位相減 2 分、等比求和與結果 2 分）

丁部　微分技巧

本部分共 4 題，合計 18 分，全部須作答。

11. 設 $y=(3x^2-5x+2)^4$，求 dy/dx 在 $x=2$ 時的值。

答案：答案：由連鎖律，$dy/dx=4(3x^2-5x+2)^3(6x-5)$。$x=2$ 時內層 $=12-10+2=4$，$4^3=64$，$6x-5=7$，故 $dy/dx=4\times64\times7=1792$。（評分：連鎖律 2 分、代入內層 1 分、數值 2 分）

12. 設 $y=x^2\ln x$，求 dy/dx 在 $x=e$ 時的值。

答案：答案：由乘積法則，$dy/dx=2x\ln x+x^2(1/x)=2x\ln x+x$。$x=e$ 時 $\ln e=1$，故 $dy/dx=2e+e=3e$，約為 8.15。（評分：乘積法則 2 分、化簡 1 分、數值 1 分）

13. 設 $y=e^{(2x)}\cos 3x$，求 dy/dx，並求 $x=0$ 時的值。

答案：答案：由乘積法則與連鎖律，$dy/dx=2e^{(2x)}\cos 3x-3e^{(2x)}\sin 3x=e^{(2x)}(2\cos 3x-3\sin 3x)$。$x=0$ 時 $\cos 0=1$、$\sin 0=0$，故 $dy/dx=1\times(2-0)=2$。（評分：乘積法則 2 分、兩個導數項各 1 分、$x=0$ 的值 1 分）

14. 求曲線 $y=x^3-4x$ 在 $x=2$ 處的切線方程。

答案：答案：$dy/dx=3x^2-4$，$x=2$ 時斜率 $=12-4=8$；切點 y 坐標 $=8-8=0$，即 $(2,0)$。切線方程為 $y=8(x-2)$，化簡得 $y=8x-16$。（評分：斜率 2 分、切點 1 分、方程 1 分）

戊部　微分應用

本部分共 3 題，合計 16 分，全部須作答。

15. 設 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$，求 f 的局部極大值與局部極小值。

答案：答案：$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$，駐點為 $x=1$ 與 $x=3$。$f(1)=1-6+9+1=5$，$f(3)=27-54+27+1=1$。故局部極大值為 5、局部極小值為 1。（評分：求導 2 分、駐點 2 分、兩個極值各 1 分）

16. 一個長方形的周界為 40 cm，求它的最大面積。

答案：答案：設長為 x，則闊為 20 − x，面積 A = x(20 − x) = 20x − x²。A′ = 20 − 2x，令 A′ = 0 得 x = 10；A″ = −2 少於 0，故為極大。最大面積 = 10×10 = 100 cm²。（評分：面積函數 2 分、求導與駐點 2 分、判別與結果 1 分）

17. 承 (a)，用二階導數判別法說明 x = 1 與 x = 3 分別為極大點還是極小點。

答案：答案：f″(x) = 6x − 12。f″(1) = −6，少於 0，故 x = 1 為極大點；f″(3) = 6，大於 0，故 x = 3 為極小點。（評分：二階導數 2 分、兩次判別共 3 分）

己部　積分與面積

本部分共 4 題，合計 16 分，全部須作答。

18. 求定積分 ∫(0 至 2) (3x² + 2x) dx。

答案：答案：原函數為 x³ + x²，代入上下限得 (2³ + 2²) − (0 + 0) = 8 + 4 = 12。（評分：原函數 3 分、代入計算 2 分）

19. 求定積分 ∫(1 至 4) x^(−1/2) dx。

答案：答案：x^(−1/2) 的原函數為 2x^(1/2)，即 2√x；代入得 2×2 − 2×1 = 4 − 2 = 2。（評分：原函數 2 分、數值 1 分）

20. 求曲線 y = 4 − x² 與 x 軸所圍成的區域面積。

答案：答案：令 4 − x² = 0 得 x = ±2。面積 = ∫(−2 至 2) (4 − x²) dx = [4x − x³/3] 由 −2 到 2 = (8 − 8/3) − (−8 + 8/3) = 32/3，約為 10.67。（評分：交點 1 分、積分式 1 分、計算 2 分）

21. 求不定積分 ∫ x e^(x²) dx。

答案：答案：令 u = x²，則 du = 2x dx，故 ∫ x e^(x²) dx = (1/2) ∫ e^u du = (1/2)e^(x²) + C。（評分：代換 2 分、原函數 1 分、常數 C 1 分）

TutorZone S5數學延伸部分單元二練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。