中五数学延伸部分单元一练习卷：二项式定理、指数与对数、微分法则与极值、积分与面积、二项分布、增长率与最优化

中五　数学延伸部分单元一　|　时限：75 分钟　|　总分：100 分　|　共 24 题

甲部：二项式定理（16 分）

每题须列出计算步骤，答案须化至最简。

1. 求 (1 + 2x)^10 展开式中 x^3 的系数。
答案：由二项式定理，x^3 项为 C(10, 3)(2x)^3，系数 = 120 × 8 = 960。

2. 求 (x − 3/x)^6 展开式中的常数项。
答案：通项 = C(6, r) x^(6−r) (−3/x)^r = C(6, r)(−3)^r x^(6−2r)。令 6 − 2r = 0 得 r = 3，常数项 = C(6, 3)(−3)^3 = 20 × (-27) = -540。

3. 求 (2 + x)^7 展开式中各项系数之和。
答案：各项系数之和 = 代入 x = 1，即 (2 + 1)^7 = 3^7 = 2187。

4. 求 (1 − x)^8 展开式中 x^5 的系数。
答案：系数 = C(8, 5)(−1)^5 = 56 × (−1) = -56。

乙部：指数与对数函数（16 分）

除特别指明外，答案须准确至三位有效数字。

5. 解方程 4^(x+1) = 8^(2x−1)。
答案：改写为 2^(2x+2) = 2^(6x−3)，故 2x + 2 = 6x − 3，4x = 5，x = 5/4 = 1.25。

6. 解方程 $\log_2 x + \log_2 (x - 3) = 2$。
答案：合并得 $\log_2 [x(x - 3)] = 2$，即 $x^2 - 3x = 4$，$x^2 - 3x - 4 = 0$，$(x - 4)(x + 1) = 0$。$x = -1$ 不合（对数定义域），故 $x = 4$。

7. 某细菌数量 N = 500 e^(kt)。3 小时后数量为 4000。(a) 求 k；(b) 数量达 20000 需时多少小时？
答案：(a) 4000 = 500 e^(3k)，e^(3k) = 8，3k = ln 8，k = ln 8 / 3 ≈ 0.693。(b) 20000 = 500 e^(kt)，e^(kt) = 40，t = ln 40 / k ≈ 5.32 小时。

8. 某放射性物质的半衰期为 12 年。(a) 求衰减常数 k；(b) 30 年后剩下原有量的百分之几？
答案：(a) e^(−12k) = 1/2，k = ln 2 / 12 ≈ 0.0578（每年）。(b) 剩余比率 = e^(−k × 30) ≈ 0.177，即约 17.7%。

丙部：微分法及其应用（20 分）

须用微分的标准法则作答，并清楚标明所用法则。

9. 设 $y = (3x^2 + 1)(x - 2)$。(a) 求 dy/dx；(b) 求 $x = 2$ 时 dy/dx 的值。
答案：展开得 $y = 3x^3 - 6x^2 + x - 2$，故 $dy/dx = 9x^2 - 12x + 1$；$x = 2$ 时 $dy/dx = 36 - 24 + 1 = 13$。

10. 设 y = (2x + 5)/(x − 1)。用商法则求 dy/dx，并化至最简。

答案：dy/dx = [2(x − 1) − (2x + 5)(1)] / (x − 1)² = (2x − 2 − 2x − 5) / (x − 1)² = −7 / (x − 1)²。

11. 设 y = (3x² + 4)^5。用链式法则求 dy/dx。

答案：dy/du = 5u^4，du/dx = 6x，故 dy/dx = 5(3x² + 4)^4 × 6x = 30x(3x² + 4)^4。

12. 设 f(x) = x³ − 6x² + 9x + 2。求 f(x) 的驻点，并判别各为极大值还是极小值，同时写出对应的函数值。

答案：f′(x) = 3x² − 12x + 9 = 3(x − 1)(x − 3)，驻点 x = 1 及 x = 3。f″(x) = 6x − 12；f″(1) = −6 小于 0，故 x = 1 为极大点，f(1) = 6；f″(3) = 6 大于 0，故 x = 3 为极小点，f(3) = 2。

丁部：积分法与面积（20 分）

不定积分须加积分常数；近似值须列出所用的分点。

13. 求 ∫ (6x² − 4x + 3) dx。

答案：∫ 6x² dx = 2x³，∫ 4x dx = 2x²，故结果为 2x³ − 2x² + 3x + C。

14. 计算 ∫₀ ² (3x² + 2x) dx。

答案：原函数为 x³ + x²，代入上下限：(8 + 4) − 0 = 12。

15. 求曲线 y = 4 − x² 与 x 轴所围成的区域面积（答案准确至三位有效数字）。

答案：曲线与 x 轴交于 x = ±2，面积 = ∫₋₂ ² (4 − x²) dx = [4x − x³/3]₋₂ ² = 2 × (8 − 8/3) = 32/3 ≈ 10.67 平方单位。

16. 用梯形法则及 4 个等宽子区间，求 ∫₀ ² x³ dx 的近似值，并与准确值比较，写出绝对误差。

答案：h = 0.5，分点 0、0.5、1、1.5、2，对应值 0、0.125、1、3.375、8。近似值 = (0.5/2)[0 + 8 + 2(0.125 + 1 + 3.375)] = 0.25 × 17 = 4.25；准确值 = 2⁴ /4 = 4；绝对误差 = 0.25。

戊部：二项分布与期望（16 分）

概率答案须准确至四位小数。

17. 设 X ~ B(10, 0.3)。求 P(X = 3)。

答案：P(X = 3) = C(10, 3)(0.3)³(0.7)⁷ = 120 × 0.027 × 0.0823543 ≈ 0.2668。

18. 承上题，求 X 的期望值及方差。

答案：期望值 = np = 10 × 0.3 = 3.0；方差 = np(1 − p) = 10 × 0.3 × 0.7 = 2.0999999999999996。

19. 承上题，求 P(X ⩾ 1)。

答案：P(X ⩾ 1) = 1 − P(X = 0) = 1 − (0.7)^10 = 1 − 0.0282475 ≈ 0.9718。

20. 某球员罚球命中率为 0.8。他射 5 球，设命中数 Y ~ B(5, 0.8)。(a) 求全部命中的概率；(b) 求至少命中 4 球的概率。

答案：(a) P(Y = 5) = 0.8^5 = 0.32768。(b) P(Y ⩾ 4) = C(5,4)(0.8)⁴ (0.19999999999999996) + 0.32768 = 0.3277 + 0.32768 = 0.73728。

己部：应用与最优化（12 分）

须说明所用公式或判别方法。

21. 某投资以连续复利增长，金额 $A = 10000\,e^{0.05t}$，t 以年计。求 $t = 10$ 时的金额（准确至整数元）。

答案：$A = 10000 \times e^{0.5} \approx 16487.21$，即约 16487 元。

22. 某产品的生产成本（百元）为 $C(x) = 0.5x^2 - 20x + 500$，$x$ 为产量。求使成本最低的产量及最低成本。

答案：$C'(x) = x - 20$，令 $C'(x) = 0$ 得 $x = 20$；$C''(x) = 1 > 0$ 故为极小。最低成本 $C(20) = 300$。

23. 求函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, 3]$ 上的平均值。

答案：平均值 $= (1/(3-0)) \int_0^3 x^2\,dx = (1/3)[x^3/3]_0^3 = (1/3)(9) = 3$。

24. 球体体积 $V = (4/3)\pi r^3$。(a) 求 $r = 5$ 时 dV/dr；(b) 若半径以 0.02 cm/s 增加，求此时体积的变化率（准确至三位有效数字）。

答案：(a) $dV/dr = 4\pi r^2$，$r = 5$ 时为 $100\pi \approx 314.16$ cm²。(b) $dV/dt = (dV/dr)(dr/dt) = 100\pi \times 0.02 = 2\pi \approx 6.28$ cm³/s。

TutorZone 中五数学延伸部分单元一练习卷｜题目与文章为原创，并非任何学校或出版社的教材。