中五數學延伸部分單元一練習卷：二項式定理、指數與對數、微分法則與極值、積分與面積、二項分佈、增長率與最優化

中五　數學延伸部分單元一　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

甲部：二項式定理（16 分）

每題須列出計算步驟，答案須化至最簡。

1. 求 (1 + 2x)^10 展開式中 x^3 的係數。
答案：由二項式定理，x^3 項為 C(10, 3)(2x)^3，係數 = 120 × 8 = 960。

2. 求 (x − 3/x)^6 展開式中的常數項。
答案：通項 = C(6, r) x^(6−r) (−3/x)^r = C(6, r)(−3)^r x^(6−2r)。令 6 − 2r = 0 得 r = 3，常數項 = C(6, 3)(−3)^3 = 20 × (-27) = -540。

3. 求 (2 + x)^7 展開式中各項係數之和。
答案：各項係數之和 = 代入 x = 1，即 (2 + 1)^7 = 3^7 = 2187。

4. 求 (1 − x)^8 展開式中 x^5 的係數。
答案：係數 = C(8, 5)(−1)^5 = 56 × (−1) = -56。

乙部：指數與對數函數（16 分）

除特別指明外，答案須準確至三位有效數字。

5. 解方程 4^(x+1) = 8^(2x−1)。
答案：改寫為 2^(2x+2) = 2^(6x−3)，故 2x + 2 = 6x − 3，4x = 5，x = 5/4 = 1.25。

6. 解方程 $\log_2 x + \log_2 (x - 3) = 2$。
答案：合併得 $\log_2 [x(x - 3)] = 2$，即 $x^2 - 3x = 4$，$x^2 - 3x - 4 = 0$，$(x - 4)(x + 1) = 0$。$x = -1$ 不合（對數定義域），故 $x = 4$。

7. 某細菌數量 N = 500 e^(kt)。3 小時後數量為 4000。(a) 求 k；(b) 數量達 20000 需時多少小時？
答案：(a) 4000 = 500 e^(3k)，e^(3k) = 8，3k = ln 8，k = ln 8 / 3 ≈ 0.693。(b) 20000 = 500 e^(kt)，e^(kt) = 40，t = ln 40 / k ≈ 5.32 小時。

8. 某放射性物質的半衰期為 12 年。(a) 求衰減常數 k；(b) 30 年後剩下原有量的百分之幾？
答案：(a) e^(−12k) = 1/2，k = ln 2 / 12 ≈ 0.0578（每年）。(b) 剩餘比率 = e^(−k × 30) ≈ 0.177，即約 17.7%。

丙部：微分法及其應用（20 分）

須用微分的標準法則作答，並清楚標明所用法則。

9. 設 $y = (3x^2 + 1)(x - 2)$。(a) 求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$；(b) 求 $x = 2$ 時 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的值。
答案：展開得 $y = 3x^3 - 6x^2 + x - 2$，故 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 9x^2 - 12x + 1$；$x = 2$ 時 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 36 - 24 + 1 = 13$。

10. 設 $y = (2x + 5)/(x - 1)$。用商法則求 dy/dx，並化至最簡。

答案：$dy/dx = [2(x - 1) - (2x + 5)(1)] / (x - 1)^2 = (2x - 2 - 2x - 5) / (x - 1)^2 = -7 / (x - 1)^2$。

11. 設 $y = (3x^2 + 4)^5$。用鏈式法則求 dy/dx。

答案：$dy/du = 5u^4$，$du/dx = 6x$，故 $dy/dx = 5(3x^2 + 4)^4 \times 6x = 30x(3x^2 + 4)^4$。

12. 設 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$。求 $f(x)$ 的駐點，並判別各為極大值還是極小值，同時寫出對應的函數值。

答案：$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$，駐點 $x = 1$ 及 $x = 3$。$f''(x) = 6x - 12$；$f''(1) = -6 < 0$ 故 $x = 1$ 為極大點，$f(1) = 6$；$f''(3) = 6 > 0$ 故 $x = 3$ 為極小點，$f(3) = 2$。

丁部：積分法與面積（20 分）

不定積分須加積分常數；近似值須列出所用的分點。

13. 求 $\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx$。

答案：$\int 6x^2\,dx = 2x^3$，$\int 4x\,dx = 2x^2$，故結果為 $2x^3 - 2x^2 + 3x + C$。

14. 計算 $\int_0^2 (3x^2 + 2x)\,dx$。

答案：原函數為 $x^3 + x^2$，代入上下限：$(8 + 4) - 0 = 12$。

15. 求曲線 $y = 4 - x^2$ 與 x 軸所圍成的區域面積（答案準確至三位有效數字）。

答案：曲線與 x 軸交於 $x = \pm 2$，面積 $= \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = [4x - x^3/3]_{-2}^{2} = 2 \times (8 - 8/3) = 32/3 \approx 10.67$ 平方單位。

16. 用梯形法則及 4 個等寬子區間，求 $\int_0^2 x^3\,dx$ 的近似值，並與準確值比較，寫出絕對誤差。

答案：$h = 0.5$，分點 0、0.5、1、1.5、2，對應值 0、0.125、1、3.375、8。近似值 $= (0.5/2)[0 + 8 + 2(0.125 + 1 + 3.375)] = 0.25 \times 17 = 4.25$；準確值 $= 2^4/4 = 4$；絕對誤差 $= 0.25$。

戊部：二項分佈與期望（16 分）

概率答案須準確至四位小數。

17. 設 $X \sim B(10, 0.3)$。求 $P(X = 3)$。

答案：$P(X = 3) = C(10, 3)(0.3)^3(0.7)^7 = 120 \times 0.027 \times 0.0823543 \approx 0.2668$。

18. 承上題，求 X 的期望值及方差。

答案：期望值 $= np = 10 \times 0.3 = 3.0$；方差 $= np(1 - p) = 10 \times 0.3 \times 0.7 = 2.0999999999999996$。

19. 承上題，求 $P(X \geqslant 1)$。

答案：$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0.7)^{10} = 1 - 0.0282475 \approx 0.9718$。

20. 某球員罰球命中率為 0.8。他射 5 球，設命中數 $Y \sim B(5, 0.8)$。(a) 求全部命中的概率；(b) 求至少命中 4 球的概率。

答案：(a) $P(Y = 5) = 0.8^5 = 0.32768$。(b) $P(Y \geqslant 4) = C(5,4)(0.8)^4 (0.19999999999999996) + 0.32768 = 0.3277 + 0.32768 = 0.73728$。

己部：應用與最優化（12 分）

須說明所用公式或判別方法。

21. 某投資以連續複利增長，金額 $A = 10000\,e^{0.05t}$，t 以年計。求 $t = 10$ 時的金額（準確至整數元）。

答案：$A = 10000 \times e^{0.5} \approx 16487.21$，即約 16487 元。

22. 某產品的生產成本（百元）為 $C(x) = 0.5x^2 - 20x + 500$，$x$ 為產量。求使成本最低的產量及最低成本。

答案：$C'(x) = x - 20$，令 $C'(x) = 0$ 得 $x = 20$；$C''(x) = 1 > 0$ 故為極小。最低成本 $C(20) = 300$。

23. 求函數 $f(x) = x^2$ 在區間 $[0, 3]$ 上的平均值。

答案：平均值 $= (1/(3-0)) \int_0^3 x^2\,dx = (1/3)[x^3/3]_0^3 = (1/3)(9) = 3$。

24. 球體體積 $V = (4/3)\pi r^3$。(a) 求 $r = 5$ 時 dV/dr；(b) 若半徑以 0.02 cm/s 增加，求此時體積的變化率（準確至三位有效數字）。

答案：(a) $dV/dr = 4\pi r^2$，$r = 5$ 時為 $100\pi \approx 314.16$ cm²。(b) $dV/dt = (dV/dr)(dr/dt) = 100\pi \times 0.02 = 2\pi \approx 6.28$ cm³/s。

TutorZone 中五數學延伸部分單元一練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。