中五数学延伸部分单元二练习卷：矩阵与行列式、向量、二项式定理与数学归纳法、指数对数微分、积分技巧、三角学与极值应用

中五　数学延伸部分单元二　|　时限：75 分钟　|　总分：100 分　|　共 24 题

第一部分：矩阵与行列式（15 分）

须展示计算步骤。

1. 设 A = [[2, 3], [1, 4]]，B = [[1, -1], [2, 0]]，求 AB。
答案：第 (1,1) 项 = 2×1 + 3×2 = 8；(1,2) = 2×(-1) + 3×0 = -2；(2,1) = 1×1 + 4×2 = 9；(2,2) = 1×(-1) + 4×0 = -1。故 AB = [[8, -2], [9, -1]]。

2. 设矩阵 N = [[k, 2], [3, k + 1]]，求使 N 为奇异矩阵（不可逆）的所有 k 值。
答案：det N = k(k+1) - 6 = k^2 + k - 6 = (k + 3)(k - 2)；令 det N = 0 得 k = -3 或 k = 2。

3. 设 M = [[4, 1], [2, 3]]，求 det M 及 M 的逆矩阵 M^(-1)。
答案：det M = 4×3 - 1×2 = 10；M^(-1) = (1/10)[[3, -1], [-2, 4]] = [[3/10, -1/10], [-2/10, 4/10]]。

4. 利用矩阵方法解方程组 3x + y = 5 与 2x + 4y = 10。
答案：系数矩阵行列式 = 3×4 - 1×2 = 10 ≠ 0，故有唯一解 x = 1、y = 2；代回 3(1) + 2 = 5 及 2(1) + 4(2) = 10 均成立。

第二部分：向量（17 分）

角度准至 0.1 度，其余如非整数须保留根式。

5. 设 a = (3, -1, 2)，b = (1, 4, -2)。求 a · b 及 a 与 b 的夹角（准至 0.1 度）。
答案：a · b = 3 - 4 - 4 = -5；|a| = √14、|b| = √21；cosθ = -5/√294 ≈ -0.2916，故 θ ≈ 107.0 度。

6. 设 a = (2, t, 1) 与 b = (1, -1, 3) 互相垂直，求 t。
答案：垂直即 a · b = 0：2×1 + t×(-1) + 1×3 = 0，即 2 - t + 3 = 0，得 t = 5。

7. 设 a = (2, -1, 3)，b = (1, 4, -2)。求 a × b。
答案：a × b = ((-1)(-2) - 3×4, 3×1 - 2×(-2), 2×4 - (-1)(1)) = (-10, 7, 9)；验算 (a × b) · a = 0、(a × b) · b = 0 均成立。

8. 设 A、B 的位置向量分别为 a = (1, 2, 3) 与 b = (2, -1, 1)。求三角形 OAB 的面积。
答案：a × b = (5, 5, -5)，其模 = √75 = 5√3；面积 = ½|a × b| = 5√3/2 ≈ 4.3301 平方单位。

第三部分：二项式定理与数学归纳法（17 分）

归纳法须写明基础步骤、假设与推导。

9. 求 (2 + x)^7 展开式中 x^3 的系数。
答案：系数 = C(7,3)×2^4 = 35×16 = 560。

10. 求 (x^2 + 2/x)^9 展开式中不含 x 的项。

答案：第 (r+1) 项为 C(9,r) 2^r x^(18-3r)；令 18 - 3r = 0 得 r = 6；该项 = C(9,6)×2^6 = 84×64 = 5376。

11. 以数学归纳法证明：对所有正整数 n，1 + 5 + 9 + ... + (4n - 3) = n(2n - 1)。

答案：n = 1 时左边 = 1、右边 = 1×1 = 1，成立；设 n = m 成立，加第 (m+1) 项 (4m+1) 得 m(2m-1) + 4m + 1 = 2m^2 + 3m + 1 = (m+1)(2m+1)，即 n = m+1 亦成立；验算 n = 5：1+5+9+13+17 = 45 = 5×9。

12. 已知 Σ(k=1 至 n) k(k+1) = n(n+1)(n+2)/3，求 Σ(k=1 至 20) k(k+1)。

答案：代入 n = 20：20×21×22/3 = 3080；逐项累加验算同得 3080。

第四部分：指数、对数与求导（17 分）

须写出所用求导法则。

13. 设 y = x^2 e^(3x)，求 dy/dx。

答案：用积法则：dy/dx = 2x e^(3x) + x^2 × 3e^(3x) = e^(3x)(2x + 3x^2)。

14. 设 y = ln(x^2 + 1)，求 dy/dx。

答案：用链式法则：dy/dx = (1/(x^2 + 1)) × 2x = 2x/(x^2 + 1)。

15. 设 y = x ln x （x > 0），求曲线在 x = e 处的切线方程。

答案：y(e) = e ln e = e，切点为 (e, e)；dy/dx = ln x + 1，于 x = e 时斜率为 2；故切线为 y - e = 2(x - e)，即 y = 2x - e。

16. 解方程 e^(2x) - 3e^x + 2 = 0。

答案：令 u = e^x > 0，得 u^2 - 3u + 2 = 0，即 u = 1 或 u = 2；故 x = 0 或 x = ln 2 ≈ 0.6931。

第五部分：积分（17 分）

定积分须写出上下限代入过程。

17. 求不定积分 ∫ x e^x dx。

答案：用分部积分：∫ x e^x dx = x e^x - ∫ e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C。

18. 计算定积分 ∫(由 1 到 e) ln x dx。

答案：∫ ln x dx = x ln x - x；代入上限 e 得 e - e = 0，下限 1 得 0 - 1 = -1；故积分值 = 0 - (-1) = 1。

19. 计算定积分 ∫(由 0 到 2) 4x/(x^2 + 1) dx。

答案：因 d(x^2 + 1) = 2x dx，原式 = 2 ln(x^2 + 1) 于 0 至 2 取值 = 2(ln 5 - ln 1) = 2 ln 5 ≈ 3.2189。

20. 求由 y = x 与 y = x^2 所围成、介乎 x = 0 与 x = 1 之间区域的面积。

答案：在 0 ⩽ x ⩽ 1 上 x ⩾ x^2，故面积 = ∫(x - x^2) dx = 1/2 - 1/3 = 1/6 ≈ 0.1667 平方单位。

第六部分：三角学与应用（17 分）

三角方程须列出 $0 \leqslant x < 2\pi$ 内所有解。

21. 证明 $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$。

答案：左边 $= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + \sin 2\theta$。

22. 解方程 $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$，其中 $0 \leqslant x < 2\pi$。

答案：分解得 $(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$；$\sin x = 1$ 得 $x = \pi/2$，$\sin x = -1/2$ 得 $x = 7\pi/6$ 或 $11\pi/6$；故解为 $\pi/2$、$7\pi/6$、$11\pi/6$。

23. 设 $y = x^3 - 3x^2 + 4$，求曲线的极大点与极小点。

答案：$dy/dx = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$，驻点为 $x = 0$ 与 $x = 2$；$x = 0$ 时 $y = 4$ 为极大点 $(0, 4)$，$x = 2$ 时 $y = 0$ 为极小点 $(2, 0)$。

24. 圆形半径 r 以每秒 2 cm 的速率增加。当 $r = 5$ cm 时，求面积 A 的增加率。

答案：$A = \pi r^2$，$dA/dt = 2\pi r \times dr/dt$；代入 $r = 5$、$dr/dt = 2$ 得 $dA/dt = 20\pi \approx 62.83$ cm^2/s。

TutorZone 中五数学延伸部分单元二练习卷｜题目与文章为原创，并非任何学校或出版社的教材。