中五数学（延伸单元一 M1）练习卷（第一份）｜求导、积分、二项与泊松、正态、估计

练习卷 · 高中数学延伸单元一

中五数学延伸部分单元一（M1）练习卷第一份，涵盖指数与对数函数求导、切线与极值及二阶导数判别、相关变率、不定积分与定积分、曲线间面积、二项与泊松分布、正态分布标准化与百分位、样本平均与不偏方差、95% 信赖区间与假设检定，全部附完整步骤及答案。

1. 指数与对数函数求导（18 分）

答案取 4 位小数，须写出求导步骤。

#	Question	Answer and marking notes
1	(a) 设 y = 3x²e^(2x)，求 dy/dx，并求 x = 1 时的导数值。	dy/dx = 6xe^(2x) + 6x²e^(2x) = 6x(1 + x)e^(2x)；x = 1 时 = 6 × 2 × e² = 12e² = 88.6687。
2	(b) 设 y = ln(4x + 1)，求 dy/dx 及 x = 2 时的导数值。	dy/dx = 4/(4x + 1)；x = 2 时 = 4/9 = 0.4444。
3	(c) 设 y = e^(3x)/x，求 dy/dx 及 x = 1 时的导数值。	dy/dx = [3e^(3x)·x − e^(3x)]/x² = e^(3x)(3x − 1)/x²；x = 1 时 = 2e³ = 40.1711。
4	(d) 设 y = x²ln x，求 dy/dx 及 x = e 时的导数值。	dy/dx = 2xln x + x²·(1/x) = 2xln x + x；x = e 时 = 2e + e = 3e = 8.1548。

2. 微分应用：驻点、切线与相关变率（16 分）

须写出 f′(x) 及判别理由。

#	Question	Answer and marking notes
5	(a) 设 f(x) = x³ − 6x² + 9x + 2，求 f′(x) 及所有驻点的坐标。	f′(x) = 3x² − 12x + 9 = 3(x − 1)(x − 3)；驻点为 (1, 6) 及 (3, 2)。
6	(b) 求曲线 y = x² + 3x 在 x = 2 处的切线方程。	斜率 = 2(2) + 3 = 7；切点 (2, 10)；切线 y = 7x − 4。
7	(c) 设 g(x) = x³ − 3x，用二阶导数判别 x = 1 及 x = −1 的驻点性质。	g′(x) = 3x² − 3，驻点 x = ±1；g″(x) = 6x，g″(1) = 6 > 0（极小点），g″(−1) = −6 < 0（极大点）。
8	(d) 球体半径以每秒 0.5 cm 增加，求半径为 3 cm 时体积的增加率（cm³/s）。	V = (4/3)πr³，dV/dt = 4πr²(dr/dt) = 4π(3²)(0.5) = 18π = 56.55 cm³/s。

3. 积分与曲线间面积（16 分）

定积分答案取 4 位小数，须写出积分步骤。

#	Question	Answer and marking notes
9	(a) 求 ∫(6x² + 4x − 3) dx。	∫(6x² + 4x − 3) dx = 2x³ + 2x² − 3x + C。
10	(b) 计算 ∫(由 1 到 2) 3x² dx。	∫ = [x³]（1 至 2）= 8 − 1 = 7。

#	Question	Answer and marking notes
11	(c) 计算 $\int$(由 0 到 1) xe^(x²) dx。	令 u = x²，du = 2xdx：$\int$ = (1/2)[e^(x²)]（0 至 1）= (e − 1)/2 = 0.8591。
12	(d) 求曲线 y = x² 与直线 y = x 在 0 ⩽ x ⩽ 1 之间所围的面积。	面积 = $\int$(由 0 到 1)(x − x²) dx = 1/2 − 1/3 = 1/6 = 0.1667 平方单位。

4. 二项分布与泊松分布（18 分）

概率取 4 位小数，须列出所用公式。

#	Question	Answer and marking notes
13	(a) X ~ B(10, 0.3)，求 P(X = 3)。	P = C(10, 3)(0.3)³(0.7)⁷ = 120 × 0.027 × 0.0824 = 0.2668。
14	(b) 承 (a)，求 X 的平均值、方差及标准差。	平均 = np = 3；方差 = np(1 − p) = 2.1；标准差 = $\sqrt{2.1}$ = 1.4491。
15	(c) Y ~ Po(4)，求 P(Y = 0) 及 P(Y ⩾ 1)。	P(Y = 0) = e^(−4) = 0.0183；P(Y ⩾ 1) = 1 − e^(−4) = 0.9817。
16	(d) 某路段平均每 5 分钟有 2.5 辆车经过，以泊松分布求 5 分钟内刚好有 2 辆车的概率。	λ = 2.5；P(Y = 2) = e^(−2.5)(2.5²)/2! = 0.2565。

5. 正态分布（16 分）

可用标准正态分布表：Φ(1) = 0.8413、Φ(1.5) = 0.9332、Φ(−1) = 0.1587、z(0.9) = 1.2816。

#	Question	Answer and marking notes
17	(a) X ~ N(60, 8²)，求 P(X < 68)。	z = (68 − 60)/8 = 1；P = Φ(1) = 0.8413。
18	(b) 承 (a)，求 P(52 < X < 72)。	z = −1 及 1.5；P = Φ(1.5) − Φ(−1) = 0.9332 − 0.1587 = 0.7745。
19	(c) 承 (a)，求 k 使 P(X < k) = 0.9。	z = 1.2816；k = 60 + 1.2816 × 8 = 70.2528。
20	(d) 承 (a)，抽取 16 个样本，求 P(样本平均 > 63)。	标准误 = 8/$\sqrt{16}$ = 2；z = (63 − 60)/2 = 1.5；P = 1 − Φ(1.5) = 0.0668。

6. 点估计、信赖区间与假设检定（16 分）

答案取 4 位小数，检定须写出结论。

#	Question	Answer and marking notes
21	(a) 样本为 12、15、9、14、10，求样本平均。	平均 = (12 + 15 + 9 + 14 + 10)/5 = 60/5 = 12。
22	(b) 承 (a)，求样本不偏方差。	离差平方和 = 0 + 9 + 9 + 4 + 4 = 26；不偏方差 = 26/(5 − 1) = 6.5000。
23	(c) 样本 25 个、平均 12、标准差 5，求母体平均的 95% 信赖区间。	标准误 = 5/$\sqrt{25}$ = 1；区间 = 12 ± 1.96 × 1 = (10.0400, 13.9600)。

#	Question	Answer and marking notes
24	(d) H0: $\mu = 50$，H1: $\mu \neq 50$；样本 36 个、平均 52.4、标准差 9，求检定统计量并在 5% 显著水平作结论。	$z = (52.4 - 50)/(9/\sqrt{36}) = 2.4/1.5 = 1.6$；$\lvert z\rvert = 1.6 < 1.96$，不拒绝 H0，无足够证据显示母体平均不等于 50。