中五數學

中五　數學（延伸部分單元一）　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

1. 指數與對數函數求導（18 分）

答案取 4 位小數，須寫出求導步驟。

1. (a) 設 y = 3x²e^(2x)，求 dy/dx，並求 x = 1 時的導數值。

答案：dy/dx = 6xe^(2x) + 6x²e^(2x) = 6x(1 + x)e^(2x)；x = 1 時 = 6 × 2 × e² = 12e² = 88.6687。

2. (b) 設 y = ln(4x + 1)，求 dy/dx 及 x = 2 時的導數值。

答案：dy/dx = 4/(4x + 1)；x = 2 時 = 4/9 = 0.4444。

3. (c) 設 y = e^(3x)/x，求 dy/dx 及 x = 1 時的導數值。

答案：dy/dx = [3e^(3x) · x − e^(3x)]/x² = e^(3x)(3x − 1)/x²；x = 1 時 = 2e³ = 40.1711。

4. (d) 設 y = x²ln x，求 dy/dx 及 x = e 時的導數值。

答案：dy/dx = 2xln x + x² · (1/x) = 2xln x + x；x = e 時 = 2e + e = 3e = 8.1548。

2. 微分應用：駐點、切線與相關變率（16 分）

須寫出 f′(x) 及判別理由。

5. (a) 設 f(x) = x³ − 6x² + 9x + 2，求 f′(x) 及所有駐點的坐標。

答案：f′(x) = 3x² − 12x + 9 = 3(x − 1)(x − 3)；駐點為 (1, 6) 及 (3, 2)。

6. (b) 求曲線 y = x² + 3x 在 x = 2 處的切線方程。

答案：斜率 = 2(2) + 3 = 7；切點 (2, 10)；切線 y = 7x − 4。

7. (c) 設 g(x) = x³ − 3x，用二階導數判別 x = 1 及 x = −1 的駐點性質。

答案：g′(x) = 3x² − 3，駐點 x = ±1；g″(x) = 6x，g″(1) = 6 > 0（極小點），g″(−1) = -6 < 0（極大點）。

8. (d) 球體半徑以每秒 0.5 cm 增加，求半徑為 3 cm 時體積的增加率（cm³/s）。

答案：V = (4/3)πr³，dV/dt = 4πr²(dr/dt) = 4π(3²)(0.5) = 18π = 56.55 cm³/s。

3. 積分與曲線間面積（16 分）

定積分答案取 4 位小數，須寫出積分步驟。

9. (a) 求 ∫ (6x² + 4x − 3) dx。

答案：∫ (6x² + 4x − 3) dx = 2x³ + 2x² − 3x + C。

10. (b) 計算 ∫ (由 1 到 2) 3x² dx。

答案：∫ = [x³]（1 至 2）= 8 − 1 = 7。

11. (c) 計算 $\int$(由 0 到 1) xe^(x²) dx。

答案：令 u = x²，du = 2xdx：$\int$ = (1/2)[e^(x²)]（0 至 1）= (e − 1)/2 = 0.8591。

12. (d) 求曲線 y = x² 與直線 y = x 在 0 ⩽ x ⩽ 1 之間所圍的面積。

答案：面積 = $\int$(由 0 到 1)(x − x²) dx = 1/2 − 1/3 = 1/6 = 0.1667 平方單位。

4. 二項分佈與泊松分佈（18 分）

概率取 4 位小數，須列出所用公式。

13. (a) X ~ B(10, 0.3)，求 P(X = 3)。

答案：P = C(10, 3)(0.3)³(0.7)⁷ = 120 × 0.027 × 0.0824 = 0.2668。

14. (b) 承 (a)，求 X 的平均值、方差及標準差。

答案：平均 = np = 3；方差 = np(1 − p) = 2.1；標準差 = √2.1 = 1.4491。

15. (c) Y ~ Po(4)，求 P(Y = 0) 及 P(Y ⩾ 1)。

答案：P(Y = 0) = e^(−4) = 0.0183；P(Y ⩾ 1) = 1 − e^(−4) = 0.9817。

16. (d) 某路段平均每 5 分鐘有 2.5 輛車經過，以泊松分佈求 5 分鐘內剛好有 2 輛車的概率。

答案：λ = 2.5；P(Y = 2) = e^(−2.5)(2.5²)/2! = 0.2565。

5. 正態分佈（16 分）

可用標準正態分佈表：Φ(1) = 0.8413、Φ(1.5) = 0.9332、Φ(−1) = 0.1587、z(0.9) = 1.2816。

17. (a) X ~ N(60, 8²)，求 P(X < 68)。

答案：z = (68 − 60)/8 = 1；P = Φ(1) = 0.8413。

18. (b) 承 (a)，求 P(52 < X < 72)。

答案：z = −1 及 1.5；P = Φ(1.5) − Φ(−1) = 0.9332 − 0.1587 = 0.7745。

19. (c) 承 (a)，求 k 使 P(X < k) = 0.9。

答案：z = 1.2816；k = 60 + 1.2816 × 8 = 70.2528。

20. (d) 承 (a)，抽取 16 個樣本，求 P(樣本平均 > 63)。

答案：標準誤 = 8/√16 = 2；z = (63 − 60)/2 = 1.5；P = 1 − Φ(1.5) = 0.0668。

6. 點估計、信賴區間與假設檢定（16 分）

答案取 4 位小數，檢定須寫出結論。

21. (a) 樣本為 12、15、9、14、10，求樣本平均。

答案：平均 = (12 + 15 + 9 + 14 + 10)/5 = 60/5 = 12。

22. (b) 承 (a)，求樣本不偏方差。

答案：離差平方和 = 0 + 9 + 9 + 4 + 4 = 26；不偏方差 = 26/(5 − 1) = 6.5000。

23. (c) 樣本 25 個、平均 12、標準差 5，求母體平均的 95% 信賴區間。

答案：標準誤 = $5/\sqrt{25} = 1$；區間 = $12 \pm 1.96 \times 1 = (10.0400, 13.9600)$。

24. (d) H0: $\mu = 50$，H1: $\mu \neq 50$；樣本 36 個、平均 52.4、標準差 9，求檢定統計量並在 5% 顯著水平作結論。

答案：$z = (52.4 - 50)/(9/\sqrt{36}) = 2.4/1.5 = 1.6$；$|z| = 1.6 < 1.96$，不拒絕 H0，無足夠證據顯示母體平均不等於 50。

TutorZone 中五數學（延伸部分單元一）練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。