中五數學練習卷：概率、隨機變量與統計分佈

中五　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

第一題　條件概率與列聯表

某校 200 名中五學生中，120 人有參加補習，其餘 80 人沒有參加。有補習的學生之中 90 人及格，沒有補習的學生之中 45 人及格。

1. 求隨機抽出一名學生而該生及格的概率。

答案：答案：及格人數 = 90 + 45 = 135，概率 = 135 ÷ 200 = 0.675。

2. 已知該生及格，求該生有參加補習的概率。

答案：答案：P(有補習 | 及格) = 90 ÷ 135 = 2/3 ≈ 0.667。

3. 分別求有補習與沒有補習的學生及格的概率，並比較兩者。

答案：答案：有補習者 90 ÷ 120 = 0.75；沒有補習者 45 ÷ 80 = 0.5625。前者高出 0.1875，即 18.75 個百分點。

4. 說明本題的數據能否證明補習導致及格率上升。

答案：答案：不能。本題只是觀察數據，沒有隨機分組，學生的基礎、動機與家庭支援等變數可能同時影響補習與成績，故只可說兩者有關聯，不能斷定因果。

第二題　獨立事件與加法法則

某校中五學生選修延伸單元二（M2）的概率為 0.6，選修物理的概率為 0.5。已知兩項選擇互相獨立。

5. 求一名學生同時選修 M2 與物理的概率。

答案：答案：P(M2 且 物理) = 0.6 × 0.5 = 0.30。

6. 求一名學生至少選修其中一科的概率。

答案：答案：P(至少一科) = 0.6 + 0.5 − 0.30 = 0.80。

7. 求一名學生兩科都沒有選修的概率。

答案：答案：P(兩科皆無) = (1 − 0.6)(1 − 0.5) = 0.4 × 0.5 = 0.20，與 1 − 0.80 一致。

8. 求一名學生只選修其中一科的概率。

答案：答案：只選 M2 為 0.6 × 0.5 = 0.30，只選物理為 0.4 × 0.5 = 0.20，合計 0.50。

第三題　離散隨機變量的期望值與方差

某店每日售出某款筆記本的數量 X 的概率分佈如下：P(X = 0) = 0.1、P(X = 1) = 0.3、P(X = 2) = 0.4、P(X = 3) = 0.2。每本售價 40 元，該店每日固定成本 20 元。

9. 求 E(X)。

答案：答案：E(X) = 0×0.1 + 1×0.3 + 2×0.4 + 3×0.2 = 0 + 0.3 + 0.8 + 0.6 = 1.7 本。

10. 求 Var(X)。

答案：答案：$E(X^2) = 0 + 0.3 + 4\times0.4 + 9\times0.2 = 0.3 + 1.6 + 1.8 = 3.7$；$\text{Var}(X) = 3.7 - 1.7^2 = 3.7 - 2.89 = 0.81$。

11. 求 X 的標準差。

答案：答案：標準差 = 根號 0.81 = 0.9 本。

12. 求每日利潤的期望值。

答案：答案：利潤 $= 40X - 20$，故 $E(\text{利潤}) = 40 \times 1.7 - 20 = 68 - 20 = 48$ 元。

第四題　正態分佈與標準化

某科成績服從正態分佈，平均值 62 分，標準差 8 分。已知 $P(Z \text{ 小於 } 1) = 0.8413$、$P(Z \text{ 小於 } 2) = 0.9772$、$P(Z \text{ 小於 } -1) = 0.1587$。

13. 求成績低於 70 分的概率。

答案：答案：$z = (70 - 62) \div 8 = 1$，概率 = 0.8413，即 84.13%。

14. 求成績高於 78 分的概率。

答案：答案：$z = (78 - 62) \div 8 = 2$，概率 $= 1 - 0.9772 = 0.0228$，即 2.28%。

15. 求成績介乎 54 分與 70 分之間的概率。

答案：答案：z 分別為 −1 與 1，概率 $= 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$，即 68.26%。

16. 若有 500 名考生，估計有多少人成績高於 78 分。

答案：答案：$500 \times 0.0228 = 11.4$，即約 11 人。

第五題　二項分佈

某選擇題測驗每題有四項選擇，只有一項正確。一名學生完全靠猜答，共答 8 題。設 X 為答對題數。

17. 寫出 X 的分佈並求 E(X)。

答案：答案：X 服從二項分佈 $B(8, 0.25)$，$E(X) = 8 \times 0.25 = 2$ 題。

18. 求 X 的方差與標準差。

答案：答案：$\text{Var}(X) = 8 \times 0.25 \times 0.75 = 1.5$；標準差 = 根號 $1.5 \approx 1.22$ 題。

19. 求全部答錯的概率。

答案：答案：$P(X = 0) = 0.75$ 的 8 次方 ≈ 0.1001，即 10.01%。

20. 求至少答對一題的概率。

答案：答案：$P(X \text{ 大於或等於 } 1) = 1 - 0.1001 = 0.8999$，即 89.99%。

第六題　標準差、變異系數與數據變換

甲班 30 人數學平均分 62，標準差 9；乙班 30 人數學平均分 68，標準差 5。

21. 分別計算兩班的變異系數，並判斷哪一班成績較分散。

答案：答案：甲班 $9 \div 62 \times 100\% \approx 14.52\%$，乙班 $5 \div 68 \times 100\% \approx 7.35\%$。甲班較大，故甲班成績相對較分散。

22. 解釋為何比較兩班分散程度時要同時用標準差與平均值。

答案：答案：標準差有單位且受平均值大小影響，平均分相差 6 分時直接比標準差會誤導；變異系數把標準差化成平均值的百分比，去除尺度影響，才可公平比較。

23. 若甲班每人加 5 分，求新的平均值與標準差。

答案：答案：平均值變為 $62 + 5 = 67$，標準差仍為 9，因為整體平移不改變各人分數之間的差距。

24. 若改為每人分數乘 1.1，求新的平均值與標準差。

答案：答案：平均值 $= 62 \times 1.1 = 68.2$，標準差 $= 9 \times 1.1 = 9.9$。

TutorZone 中五數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。