中五數學練習卷：圓的方程與圓形性質

中五　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 22 題

第一部分：圓的方程、圓心與半徑（16 分）

圓的一般式方程為 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$，配方法可把它寫成標準式，直接讀出圓心與半徑。判斷一點與圓的相對位置，只需比較該點與圓心的距離和半徑。

1. 圓 C 的方程為 $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$。以配方法求圓心坐標及半徑。

答案：答案：配方得 $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 49$，圓心為 $(3, -4)$，半徑為 7。（評分要點：兩次配方各 1 分，常數項整理 1 分，圓心與半徑各 0.5 分）

2. 判斷點 P(3, 3) 與圓 C 的相對位置，並說明理由。

答案：答案：P 與圓心的距離 $= |3 - (-4)| = 7$，等於半徑，所以 P 在圓上。（評分要點：距離算術 2 分，與半徑比較 1 分，結論 1 分）

3. 判斷點 Q(9, −4) 與圓 C 的相對位置，並說明理由。

答案：答案：Q 與圓心的距離 = 6，小於半徑 7，所以 Q 在圓內。（評分要點：距離算術 2 分，比較 1 分，結論 1 分）

4. 求圓 C 與 y 軸的交點數目，並說明理由。

答案：答案：令 $x = 0$ 得 $y^2 + 8y - 24 = 0$，判別式 $= 64 + 96 = 160$，大於零，所以有 2 個交點。（評分要點：代 $x = 0$ 得二次方程 1 分，判別式 2 分，結論 1 分）

第二部分：直線與圓相切（18 分）

圓 $x^2 + y^2 = r^2$ 與直線相切時，圓心到直線的距離剛好等於半徑。切點是圓心向直線所作垂線的垂足，可由圓心與垂線方向直接求出。

5. 直線 L 的方程為 $y = x + k$，L 與圓 $x^2 + y^2 = 25$ 相切。求 k 的兩個可能值。

答案：答案：改寫為 $x - y + k = 0$，圓心到直線距離 $= |k| \div \sqrt{2} = 5$，得 $k = \pm 5\sqrt{2}$，即約 7.1 與 −7.1。（評分要點：距離公式 2 分，令距離等於半徑 2 分，兩個值各 1 分）

6. 取 k 為正數，求 L 與圓的切點坐標（以根式表示，並給出一個小數近似值）。

答案：答案：垂足為 $(-k \div 2, k \div 2) = (-5\sqrt{2} \div 2, 5\sqrt{2} \div 2)$，約 $(-3.5, 3.5)$。（評分要點：垂足方向 2 分，坐標各 1 分，近似值 2 分）

7. 取 k 為正數，求 L 與兩坐標軸圍成的三角形面積。

答案：答案：截距為 $(0, k)$ 與 $(-k, 0)$，兩腰均長 k，面積 $= k^2 \div 2 = 50 \div 2 = 25$ 平方單位。（評分要點：截距各 1 分，面積公式 2 分，答案 2 分）

第三部分：圓上一點的切線（16 分）

由圓心連到切點的半徑與切線互相垂直，因此兩者斜率的乘積為 −1。求切線方程時，先求半徑斜率，再取負倒數，最後用點斜式寫出方程。

8. 圓 C 的方程為 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$。求圓心坐標及半徑。

答案：答案：$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$，圓心 $(2, 3)$，半徑 5。（評分要點：配方 2 分，圓心 1 分，半徑 1 分）

9. 證明點 A(5, 7) 在圓 C 上。

答案：答案：A 與圓心距離的平方 $= 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$，等於半徑的平方，所以 A 在圓上。（評分要點：代入 2 分，比較 1 分，結論 1 分）

10. 求圓 C 在點 A 的切線方程，並以一般式表示。

答案：答案：半徑斜率 $= 4/3$，切線斜率 $= -3/4$；$y - 7 = -3/4\,(x - 5)$，化簡得 $3x + 4y - 43 = 0$。（評分要點：半徑斜率 1 分，切線斜率 1 分，方程 2 分）

11. 求上述切線在 x 軸上的截距。

答案：答案：令 $y = 0$ 得 $3x = 43$，x 截距約為 14.3。（評分要點：代 $y = 0$ 得 2 分，解方程 1 分，近似值 1 分）

第四部分：兩圓的位置關聯與根軸（18 分）

比較兩圓圓心距離與半徑和、半徑差，可判定兩圓相交、外切、內切或相離。把兩圓方程相減，二次項互相抵消，所得直線就是根軸。

12. 圓 C_1：$x^2 + y^2 - 4x = 0$ 與圓 C_2：$x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$。求兩圓的圓心及半徑。

答案：答案：C_1 圓心 $(2, 0)$、半徑 2；C_2 圓心 $(0, 3)$、半徑 1。（評分要點：每個圓心 1 分，每個半徑 1 分）

13. 判定兩圓的位置關聯，並說明理由。

答案：答案：圓心距離 $= \sqrt{(4 + 9)} = \sqrt{13}$，約 3.6，大於半徑和 3，所以兩圓外離，沒有交點。（評分要點：圓心距離 2 分，與半徑和比較 1 分，結論 1 分）

14. 把兩圓方程相減，求根軸的方程（以一般式表示）。

答案：答案：相減得 $-4x + 6y - 8 = 0$，即 $2x - 3y + 4 = 0$。（評分要點：相減步驟 2 分，整理常數 2 分，整理形式 2 分）

15. 判斷點 $(2, 3)$ 是否在根軸上，並說明理由。

答案：答案：代入得 $4 - 9 + 4 = -3$，不等於零，所以該點不在根軸上。（評分要點：代入 2 分，比較 1 分，結論 1 分）

第五部分：圓形性質（16 分）

圓內接四邊形的對角互補，同弧所對的圓周角相等，切線與弦的夾角等於該弦在另一弓形內所對的圓周角。這三條定理是中五圓形題目的主要工具。

16. 圓內接四邊形 ABCD 中，角 A = 3x + 10 度，角 C = 2x + 30 度。求 x 的值，以及角 A 與角 C 的大小。

答案：答案：對角互補，(3x + 10) + (2x + 30) = 180，得 x = 28，角 A = 94 度，角 C = 86 度。（評分要點：列式 2 分，解 x 2 分，兩角各 1 分）

17. A、B、C、D 四點在同一圓上，角 BAC = 34 度，角 ACB = 58 度。求角 ABC 及角 BDC。

答案：答案：三角形內角和得角 ABC = 180 − 34 − 58 = 88 度；同弧 BC 所對圓周角相等，角 BDC = 角 BAC = 34 度。（評分要點：角 ABC 2 分，引用同弧定理 1 分，角 BDC 2 分）

18. 圓上一點 A 的切線與弦 AB 的夾角為 52 度。求弦 AB 在另一弓形內所對的圓周角 ACB。

答案：答案：由切線與弦的夾角定理，角 ACB 等於 52 度。（評分要點：指出所用定理 3 分，答案與單位 2 分）

第六部分：直線與圓相交、弦長與中點（16 分）

把直線方程代入圓方程，可得一個二次方程，其判別式決定交點數目。弦的中點就是圓心到直線所作垂線的垂足，因此中點坐標可用垂足公式求出，不必先解出兩個交點。

19. 圓 C：$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$。求圓心及半徑。

答案：答案：$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$，圓心 $(1, -2)$，半徑 5。（評分要點：配方 2 分，圓心 1 分，半徑 1 分）

20. 直線 $y = x + 1$ 與圓 C 相交。以代入法證明有兩個交點。

答案：答案：代入得 $2x^2 + 4x - 15 = 0$，判別式 = 16 + 120 = 136，大於零，所以有兩個交點。（評分要點：代入與整理 2 分，判別式 1 分，結論 1 分）

21. 求兩交點之間的弦長（以根式表示，並給出一個小數近似值）。

答案：答案：兩根的差 = $\sqrt{136} \div 2 = \sqrt{34}$，弦長 = $\sqrt{2} \times \sqrt{34} = 2\sqrt{17}$，約 8.2。（評分要點：兩根差 2 分，乘 $\sqrt{2}$ 1 分，根式答案與近似值各 0.5 分）

22. 求該弦的中點坐標，並用垂足方法驗算。

答案：答案：中點 $x = -4 \div 4 = -1$，$y = 0$，即 $(-1, 0)$；圓心到直線垂足亦為 $(1 - 2, -2 + 2) = (-1, 0)$，兩法一致。（評分要點：中點 2 分，垂足驗算 1 分，結論 1 分）

TutorZone 中五數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。