中五數學練習卷：圓的方程與圓形性質

中五　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 22 題

第一部分：圓的方程、圓心與半徑（16 分）

圓的一般式方程為 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$，配方法可把它寫成標準式，直接讀出圓心與半徑。判斷一點與圓的相對位置，只需比較該點與圓心的距離和半徑。

1. 圓 C 的方程為 $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$。以配方法求圓心坐標及半徑。

2. 判斷點 P(3, 3) 與圓 C 的相對位置，並說明理由。

3. 判斷點 Q(9, −4) 與圓 C 的相對位置，並說明理由。

4. 求圓 C 與 y 軸的交點數目，並說明理由。

第二部分：直線與圓相切（18 分）

圓 $x^2 + y^2 = r^2$ 與直線相切時，圓心到直線的距離剛好等於半徑。切點是圓心向直線所作垂線的垂足，可由圓心與垂線方向直接求出。

5. 直線 L 的方程為 $y = x + k$，L 與圓 $x^2 + y^2 = 25$ 相切。求 k 的兩個可能值。

6. 取 k 為正數，求 L 與圓的切點坐標（以根式表示，並給出一個小數近似值）。

7. 取 k 為正數，求 L 與兩坐標軸圍成的三角形面積。

第三部分：圓上一點的切線（16 分）

由圓心連到切點的半徑與切線互相垂直，因此兩者斜率的乘積為 −1。求切線方程時，先求半徑斜率，再取負倒數，最後用點斜式寫出方程。

8. 圓 C 的方程為 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$。求圓心坐標及半徑。

9. 證明點 A(5, 7) 在圓 C 上。

10. 求圓 C 在點 A 的切線方程，並以一般式表示。

11. 求上述切線在 x 軸上的截距。

第四部分：兩圓的位置關聯與根軸（18 分）

比較兩圓圓心距離與半徑和、半徑差，可判定兩圓相交、外切、內切或相離。把兩圓方程相減，二次項互相抵消，所得直線就是根軸。

12. 圓 C_1：$x^2 + y^2 - 4x = 0$ 與圓 C_2：$x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$。求兩圓的圓心及半徑。

13. 判定兩圓的位置關聯，並說明理由。

14. 把兩圓方程相減，求根軸的方程（以一般式表示）。

15. 判斷點 (2, 3) 是否在根軸上，並說明理由。

第五部分：圓形性質（16 分）

圓內接四邊形的對角互補，同弧所對的圓周角相等，切線與弦的夾角等於該弦在另一弓形內所對的圓周角。這三條定理是中五圓形題目的主要工具。

16. 圓內接四邊形 ABCD 中，角 A = 3x + 10 度，角 C = 2x + 30 度。求 x 的值，以及角 A 與角 C 的大小。

17. A、B、C、D 四點在同一圓上，角 BAC = 34 度，角 ACB = 58 度。求角 ABC 及角 BDC。

18. 圓上一點 A 的切線與弦 AB 的夾角為 52 度。求弦 AB 在另一弓形內所對的圓周角 ACB。

第六部分：直線與圓相交、弦長與中點（16 分）

把直線方程代入圓方程，可得一個二次方程，其判別式決定交點數目。弦的中點就是圓心到直線所作垂線的垂足，因此中點坐標可用垂足公式求出，不必先解出兩個交點。

19. 圓 C：$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$。求圓心及半徑。

20. 直線 $y = x + 1$ 與圓 C 相交。以代入法證明有兩個交點。

21. 求兩交點之間的弦長（以根式表示，並給出一個小數近似值）。

22. 求該弦的中點坐標，並用垂足方法驗算。

TutorZone 中五數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。