中六数学（延伸部分单元一）练习卷：二项式定理、指数与对数、微分与积分、二项与泊松分布、正态近似、估计与置信区间

中六　数学（延伸部分单元一）　|　时限：75 分钟　|　总分：100 分　|　共 24 题

甲部　二项式定理（16 分）

设 x 为实数，考虑 $(1+2x)^{10}$ 的展开式。

1. 求展开式中 x^3 的系数。（4 分）

2. 求展开式中 x^4 的系数。（4 分）

3. 求 $(1-3x)(1+2x)^{10}$ 展开式中 x^2 的系数。（4 分）

4. 取 $x=0.01$，用展开式首三项估算 1.02^{10}，并求百分误差。（4 分）

乙部　指数与对数函数（16 分）

除特别指明外，答案取三位有效数字。

5. 解 $5^{2x-1}=40$。（4 分）

6. 解 $\ln(x+2)+\ln(x-1)=\ln 10$。（4 分）

7. 某镇人口 48 000，每年增长 3.5%，求人口增至 70 000 所需年数。（4 分）

8. 设 $y=e^{3x}\ln x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 在 $x=1$ 的值。（4 分）

丙部　微分法及其应用（18 分）

以下各题除特别指明外，定义域为 $x>0$。

9. $y=x^2e^{-x}$，求所有驻点并判别其性质。（4 分）

10. $y=\ln(x^2+1)$，求 $x=1$ 处的切线方程。（4 分）

11. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $x=2$ 时的值。（5 分）

12. 球体体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，体积以 $100\ \text{cm}^3/\text{s}$ 增加，求 $r=5\ \text{cm}$ 时半径增加率。（5 分）

丁部　积分法（16 分）

求下列各积分，答案取三位有效数字。

13. 求 $\displaystyle\int_0^{1} x\,e^{x^2}\,dx$。（4 分）

14. 求 $\displaystyle\int_1^{4} \left(3\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx$。（4 分）

15. 求 $\int (2x+3)/(x^2+3x+5)\,dx$，并求由 0 至 1 的定积分。（4 分）

16. 求曲线 $y = x(4-x)$ 与 x 轴在 $0 \leqslant x \leqslant 4$ 之间围成的面积。（4 分）

戊部　概率分布（18 分）

设 $X \sim B(20, 0.3)$、$Y \sim Po(4)$，以下各小题互相独立。

17. 求 $P(X = 6)$、$E(X)$ 及 $Var(X)$。（4 分）

18. 求 $P(Y \leqslant 2)$。（4 分）

19. 设 $Z \sim B(200, 0.4)$，用正态近似（含连续性修正）求 $P(Z \geqslant 90)$。（5 分）

20. 某工序不良率 3%，抽验 100 件，用泊松近似求最多 1 件不良的概率。（5 分）

己部　统计推论（16 分）

除特别指明外，答案取三位有效数字。

21. 样本数 9，样本平均 24.6，样本标准差 3.0，求母体平均的 95% 置信区间。（4 分）

22. 承上题，若已知标准差约为 5.0，要求置信区间半宽不超过 1.0，求最小样本数。（4 分）

23. 数据 4, 7, 9, 12, 13，求平均、方差的不偏估计及样本标准差。（4 分）

24. 样本数 100、样本平均 52、样本标准差 8，在 5% 显著水平下双尾检定 $H_0: \mu = 50$。（4 分）
