中六數學（延伸部分單元一）練習卷：二項式定理、指數與對數、微分與積分、二項與泊松分佈、正態近似、估計與置信區間

中六　數學（延伸部分單元一）　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

甲部　二項式定理（16 分）

設 x 為實數，考慮 $(1+2x)^{10}$ 的展開式。

1. 求展開式中 x^3 的係數。（4 分）

2. 求展開式中 x^4 的係數。（4 分）

3. 求 $(1-3x)(1+2x)^{10}$ 展開式中 x^2 的係數。（4 分）

4. 取 $x=0.01$，用展開式首三項估算 1.02^{10}，並求百分誤差。（4 分）

乙部　指數與對數函數（16 分）

除特別指明外，答案取三位有效數字。

5. 解 $5^{2x-1}=40$。（4 分）

6. 解 $\ln(x+2)+\ln(x-1)=\ln 10$。（4 分）

7. 某鎮人口 48 000，每年增長 3.5%，求人口增至 70 000 所需年數。（4 分）

8. 設 $y=e^{3x}\ln x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 在 $x=1$ 的值。（4 分）

丙部　微分法及其應用（18 分）

以下各題除特別指明外，定義域為 $x>0$。

9. $y=x^2e^{-x}$，求所有駐點並判別其性質。（4 分）

10. $y=\ln(x^2+1)$，求 $x=1$ 處的切線方程。（4 分）

11. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $x=2$ 時的值。（5 分）

12. 球體體積 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，體積以 $100\ \text{cm}^3/\text{s}$ 增加，求 $r=5\ \text{cm}$ 時半徑增加率。（5 分）

丁部　積分法（16 分）

求下列各積分，答案取三位有效數字。

13. 求 $\displaystyle\int_0^{1} x\,e^{x^2}\,dx$。（4 分）

14. 求 $\displaystyle\int_1^{4} \left(3\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx$。（4 分）

15. 求 $\int (2x+3)/(x^2+3x+5)\,dx$，並求由 0 至 1 的定積分。（4 分）

16. 求曲線 $y = x(4-x)$ 與 x 軸在 $0 \leqslant x \leqslant 4$ 之間圍成的面積。（4 分）

戊部　概率分佈（18 分）

設 $X \sim B(20, 0.3)$、$Y \sim Po(4)$，以下各小題互相獨立。

17. 求 $P(X = 6)$、$E(X)$ 及 $Var(X)$。（4 分）

18. 求 $P(Y \leqslant 2)$。（4 分）

19. 設 $Z \sim B(200, 0.4)$，用正態近似（含連續性修正）求 $P(Z \geqslant 90)$。（5 分）

20. 某工序不良率 3%，抽驗 100 件，用泊松近似求最多 1 件不良的概率。（5 分）

己部　統計推論（16 分）

除特別指明外，答案取三位有效數字。

21. 樣本數 9，樣本平均 24.6，樣本標準差 3.0，求母體平均的 95% 置信區間。（4 分）

22. 承上題，若已知標準差約為 5.0，要求置信區間半寬不超過 1.0，求最小樣本數。（4 分）

23. 數據 4, 7, 9, 12, 13，求平均、方差的不偏估計及樣本標準差。（4 分）

24. 樣本數 100、樣本平均 52、樣本標準差 8，在 5% 顯著水平下雙尾檢定 $H_0: \mu = 50$。（4 分）
