中六数学（延伸部分单元一）练习卷：二项式定理、指数与对数、微分与积分、二项与泊松分布、正态近似、估计与置信区间

中六　数学（延伸部分单元一）　|　时限：75 分钟　|　总分：100 分　|　共 24 题

甲部　二项式定理（16 分）

设 x 为实数，考虑 (1 + 2x)^10 的展开式。

1. 求展开式中 x^3 的系数。（4 分）
答案：x^3 的系数 = C(10,3) × 2^3 = 120 × 8 = 960。

2. 求展开式中 x^4 的系数。（4 分）
答案：x^4 的系数 = C(10,4) × 2^4 = 210 × 16 = 3360。

3. 求 (1 − 3x)(1 + 2x)^10 展开式中 x^2 的系数。（4 分）
答案：x^2 的系数 = C(10,2) × 2^2 − 3 × C(10,1) × 2 = 180 − 60 = 120。

4. 取 x = 0.01，用展开式首三项估算 1.02^10，并求百分误差。（4 分）
答案：1 + 10(0.02) + 45(0.02)² = 1.218；真值 1.218994；百分误差 = 0.0816%。

乙部　指数与对数函数（16 分）

除特别指明外，答案取三位有效数字。

5. 解 5^(2x − 1) = 40。（4 分）
答案：2x − 1 = ln 40 ÷ ln 5 = 2.2920，故 x = 1.646。

6. 解 ln(x + 2) + ln(x − 1) = ln 10。（4 分）
答案：得 (x + 2)(x − 1) = 10，即 $x^2 + x - 12 = 0$，x = 3 或 x = −4（因 x > 1 而舍去），故 x = 3。

7. 某镇人口 48 000，每年增长 3.5%，求人口增至 70 000 所需年数。（4 分）
答案：48000(1.035)^t = 70000，t = ln(70000 ÷ 48000) ÷ ln 1.035 = 10.97 年，即约 11 年。

8. 设 y = e^(3x) ln x，求 dy/dx 在 x = 1 的值。（4 分）
答案：dy/dx = e^(3x)(3 ln x + 1/x)；代入 x = 1 得 e^3 = 20.09。

丙部　微分法及其应用（18 分）

以下各题除特别指明外，定义域为 x > 0。

9. $y = x^2 e^{-x}$，求所有驻点并判别其性质。（4 分）
答案：dy/dx = e^(−x)(2x − x^2)，驻点 x = 0 及 x = 2；x = 0 时 y = 0 为极小，x = 2 时 y = $4e^{-2}$ = 0.5413 为极大。

10. y = ln(x^2 + 1)，求 x = 1 处的切线方程。（4 分）
答案：dy/dx = 2x/(x^2 + 1)，在 x = 1 斜率 = 1，切点 (1, 0.6931)，故切线为 y = x − 0.3069。

11. $y = (2x + 1)/(x - 1)$，求 dy/dx 及 $x = 2$ 时的值。（5 分）

答案：$dy/dx = [2(x - 1) - (2x + 1)]/(x - 1)^2 = -3/(x - 1)^2$；$x = 2$ 时 $dy/dx = -3$。

12. 球体体积 $V = (4/3)\pi r^3$，体积以 100 cm³/s 增加，求 $r = 5$ cm 时半径增加率。（5 分）

答案：$dV/dt = 4\pi r^2 \, dr/dt$，故 $dr/dt = 100 \div (4\pi \times 25) = 0.3183$ cm/s。

丁部　积分法（16 分）

求下列各积分，答案取三位有效数字。

13. 求 $\int_0^1 x \, e^{(x^2)} \, dx$。（4 分）

答案：设 $u = x^2$，$du = 2x \, dx$，得 $(1/2)[e^{(x^2)}]_0^1 = (e - 1)/2 = 0.8591$。

14. 求 $\int_1^4 (3\sqrt{x} + 1/x) \, dx$。（4 分）

答案：$= [2x^{(3/2)} + \ln x]_1^4 = (16 - 2) + \ln 4 = 15.39$。

15. 求 $\int (2x + 3)/(x^2 + 3x + 5) \, dx$，并求由 0 至 1 的定积分。（4 分）

答案：$= \ln(x^2 + 3x + 5) + C$；定积分 $= \ln(9 \div 5) = 0.5878$。

16. 求曲线 $y = x(4 - x)$ 与 x 轴在 $0 \leqslant x \leqslant 4$ 之间围成的面积。（4 分）

答案：面积 $= \int_0^4 (4x - x^2) \, dx = [2x^2 - x^3/3]_0^4 = 32/3 = 10.67$。

戊部　概率分布（18 分）

设 $X \sim B(20, 0.3)$、$Y \sim Po(4)$，以下各小题互相独立。

17. 求 $P(X = 6)$、$E(X)$ 及 $Var(X)$。（4 分）

答案：$P(X = 6) = C(20,6)(0.3)^6 \, (0.7)^{14} = 0.1916$；$E(X) = 20 \times 0.3 = 6$；$Var(X) = 20 \times 0.3 \times 0.7 = 4.2$。

18. 求 $P(Y \leqslant 2)$。（4 分）

答案：$P(Y \leqslant 2) = e^{-4}(1 + 4 + 8) = 0.2381$。

19. 设 $Z \sim B(200, 0.4)$，用正态近似（含连续性修正）求 $P(Z \geqslant 90)$。（5 分）

答案：$\mu = 80$，$\sigma = \sqrt{48} = 6.928$，$z = (89.5 - 80) \div \sigma = 1.37$，$P(Z \geqslant 90) \approx 0.0852$。

20. 某工序不良率 3%，抽验 100 件，用泊松近似求最多 1 件不良的概率。（5 分）

答案：$\lambda = 100 \times 0.03 = 3$，$P(W \leqslant 1) = e^{-3}(1 + 3) = 0.1991$。

己部　统计推论（16 分）

除特别指明外，答案取三位有效数字。

21. 样本数 9，样本平均 24.6，样本标准差 3.0，求母体平均的 95% 置信区间。（4 分）

答案：$24.6 \pm 1.96 \times 3.0/\sqrt{9} = 24.6 \pm 1.96$，即 $(22.64, 26.56)$。

22. 承上题，若已知标准差约为 5.0，要求置信区间半宽不超过 1.0，求最小样本数。（4 分）

答案：$n \geqslant (1.96 \times 5.0 \div 1.0)^2 = 96.04$，故最小样本数 $n = 97$。

23. 数据 4, 7, 9, 12, 13，求平均、方差的不偏估计及样本标准差。（4 分）

答案：平均 $= 9$；$\Sigma(x-\bar{x})^2 = 54$；$s^2 = 13.5$；$s = 3.674$。

24. 样本数 100、样本平均 52、样本标准差 8，在 5% 显著水平下双尾检定 $H_0: \mu = 50$。（4 分）

答案：$z = (52-50) \div (8/10) = 2.5$，p 值 $= 0.0124 < 0.05$，故拒绝 H_0。
