中六數學（延伸部分單元一）練習卷：二項式定理、指數與對數、微分與積分、二項與泊松分佈、正態近似、估計與置信區間

中六　數學（延伸部分單元一）　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

甲部　二項式定理（16 分）

設 x 為實數，考慮 $(1+2x)^{10}$ 的展開式。

1. 求展開式中 x^3 的係數。（4 分）
答案：x^3 的係數 $= C(10,3)\times 2^3 = 120\times 8 = 960$。

2. 求展開式中 x^4 的係數。（4 分）
答案：x^4 的係數 $= C(10,4)\times 2^4 = 210\times 16 = 3360$。

3. 求 $(1-3x)(1+2x)^{10}$ 展開式中 x^2 的係數。（4 分）
答案：x^2 的係數 $= C(10,2)\times 2^2 - 3\times C(10,1)\times 2 = 180 - 60 = 120$。

4. 取 $x=0.01$，用展開式首三項估算 1.02^{10}，並求百分誤差。（4 分）
答案：$1 + 10(0.02) + 45(0.02)^2 = 1.218$；真值 1.218994；百分誤差 $= 0.0816\%$。

乙部　指數與對數函數（16 分）

除特別指明外，答案取三位有效數字。

5. 解 $5^{2x-1} = 40$。（4 分）
答案：$2x-1 = \ln 40 \div \ln 5 = 2.2920$，故 $x = 1.646$。

6. 解 $\ln(x+2) + \ln(x-1) = \ln 10$。（4 分）
答案：得 $(x+2)(x-1)=10$，即 $x^2+x-12=0$，$x=3$ 或 $x=-4$（因 $x>1$ 而捨去），故 $x=3$。

7. 某鎮人口 48 000，每年增長 3.5%，求人口增至 70 000 所需年數。（4 分）
答案：$48000(1.035)^t = 70000$，$t = \ln(70000\div 48000)\div \ln 1.035 = 10.97$ 年，即約 11 年。

8. 設 $y = e^{3x}\ln x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 在 $x=1$ 的值。（4 分）
答案：$\dfrac{dy}{dx} = e^{3x}(3\ln x + 1/x)$；代入 $x=1$ 得 $e^3 = 20.09$。

丙部　微分法及其應用（18 分）

以下各題除特別指明外，定義域為 $x>0$。

9. $y = x^2e^{-x}$，求所有駐點並判別其性質。（4 分）
答案：$\dfrac{dy}{dx} = e^{-x}(2x-x^2)$，駐點 $x=0$ 及 $x=2$；$x=0$ 時 $y=0$ 為極小，$x=2$ 時 $y = 4e^{-2} = 0.5413$ 為極大。

10. $y = \ln(x^2+1)$，求 $x=1$ 處的切線方程。（4 分）
答案：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{x^2+1}$，在 $x=1$ 斜率 $=1$，切點 $(1, 0.6931)$，故切線為 $y = x - 0.3069$。

11. $y = (2x + 1)/(x - 1)$，求 dy/dx 及 $x = 2$ 時的值。（5 分）

答案：$dy/dx = [2(x - 1) - (2x + 1)]/(x - 1)^2 = -3/(x - 1)^2$；$x = 2$ 時 $dy/dx = -3$。

12. 球體體積 $V = (4/3)\pi r^3$，體積以 100 cm³/s 增加，求 $r = 5$ cm 時半徑增加率。（5 分）

答案：$dV/dt = 4\pi r^2 \, dr/dt$，故 $dr/dt = 100 \div (4\pi \times 25) = 0.3183$ cm/s。

丁部　積分法（16 分）

求下列各積分，答案取三位有效數字。

13. 求 $\int_0^1 x \, e^{(x^2)} \, dx$。（4 分）

答案：設 $u = x^2$，$du = 2x \, dx$，得 $(1/2)[e^{(x^2)}]_0^1 = (e - 1)/2 = 0.8591$。

14. 求 $\int_1^4 (3\sqrt{x} + 1/x) \, dx$。（4 分）

答案：$= [2x^{(3/2)} + \ln x]_1^4 = (16 - 2) + \ln 4 = 15.39$。

15. 求 $\int (2x + 3)/(x^2 + 3x + 5) \, dx$，並求由 0 至 1 的定積分。（4 分）

答案：$= \ln(x^2 + 3x + 5) + C$；定積分 $= \ln(9 \div 5) = 0.5878$。

16. 求曲線 $y = x(4 - x)$ 與 x 軸在 $0 \leqslant x \leqslant 4$ 之間圍成的面積。（4 分）

答案：面積 $= \int_0^4 (4x - x^2) \, dx = [2x^2 - x^3/3]_0^4 = 32/3 = 10.67$。

戊部　概率分佈（18 分）

設 $X \sim B(20, 0.3)$、$Y \sim Po(4)$，以下各小題互相獨立。

17. 求 $P(X = 6)$、$E(X)$ 及 $Var(X)$。（4 分）

答案：$P(X = 6) = C(20,6)(0.3)^6 \, (0.7)^{14} = 0.1916$；$E(X) = 20 \times 0.3 = 6$；$Var(X) = 20 \times 0.3 \times 0.7 = 4.2$。

18. 求 $P(Y \leqslant 2)$。（4 分）

答案：$P(Y \leqslant 2) = e^{-4}(1 + 4 + 8) = 0.2381$。

19. 設 $Z \sim B(200, 0.4)$，用正態近似（含連續性修正）求 $P(Z \geqslant 90)$。（5 分）

答案：$\mu = 80$，$\sigma = \sqrt{48} = 6.928$，$z = (89.5 - 80) \div \sigma = 1.37$，$P(Z \geqslant 90) \approx 0.0852$。

20. 某工序不良率 3%，抽驗 100 件，用泊松近似求最多 1 件不良的概率。（5 分）

答案：$\lambda = 100 \times 0.03 = 3$，$P(W \leqslant 1) = e^{-3}(1 + 3) = 0.1991$。

己部　統計推論（16 分）

除特別指明外，答案取三位有效數字。

21. 樣本數 9，樣本平均 24.6，樣本標準差 3.0，求母體平均的 95% 置信區間。（4 分）

答案：$24.6 \pm 1.96 \times 3.0/\sqrt{9} = 24.6 \pm 1.96$，即 $(22.64, 26.56)$。

22. 承上題，若已知標準差約為 5.0，要求置信區間半寬不超過 1.0，求最小樣本數。（4 分）

答案：$n \geqslant (1.96 \times 5.0 \div 1.0)^2 = 96.04$，故最小樣本數 $n = 97$。

23. 數據 4, 7, 9, 12, 13，求平均、方差的不偏估計及樣本標準差。（4 分）

答案：平均 $= 9$；$\Sigma(x - \bar{x})^2 = 54$；$s^2 = 13.5$；$s = 3.674$。

24. 樣本數 100、樣本平均 52、樣本標準差 8，在 5% 顯著水平下雙尾檢定 $H_0 : \mu = 50$。（4 分）

答案：$z = (52 - 50) \div (8/10) = 2.5$，p 值 $= 0.0124 < 0.05$，故拒絕 H_0。

TutorZone 中六數學（延伸部分單元一）練習卷｜題目為原創，並非任何學校或出版社的教材。