中六數學延伸部分單元一練習卷：二項分佈、泊松分佈、正態分佈、置信區間與梯形法則

S6　數學延伸部分單元一　｜　時限：60 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 16 題

甲部　二項分佈

本部分共 3 題，合計 16 分，全部須作答。設 X 為二項分佈隨機變數，n = 20、p = 0.3。

1. 求 X 的期望值、方差與標準差。

答案：答案：期望值 = np = 20×0.3 = 6；方差 = np(1 − p) = 6×0.7 = 4.2；標準差 = √4.2，約為 2.0494。（評分：期望 2 分、方差 2 分、標準差 2 分）

2. 求 P(X = 5)，答案準確至四位小數。

答案：答案：P(X = 5) = C(20,5)(0.3)^5(0.7)^15 = 15504×0.00243×0.0047476，約為 0.1789。（評分：二項公式 3 分、數值 2 分）

3. 求 P(X 少於或等於 2)，答案準確至四位小數。

答案：答案：P(X ⩽ 2) = P(0) + P(1) + P(2) = 0.0008 + 0.0068 + 0.0278，合計約為 0.0355。（評分：逐項計算 3 分、相加與數值 2 分）

乙部　泊松分佈

本部分共 3 題，合計 16 分，全部須作答。設某熱線每小時平均接到 4 個查詢，查詢數目符合泊松分佈。

4. 求一小時內接到零個查詢的概率。

答案：答案：設 X 為一小時查詢數，X 附從泊松分佈、均值 4。P(X = 0) = e^(−4)，約為 0.0183。（評分：設定分佈 2 分、公式 1 分、數值 2 分）

5. 求一小時內接到兩個或以下查詢的概率。

答案：答案：P(X ⩽ 2) = e^(−4)(1 + 4 + 8) = 13e^(−4)，約為 0.2381。（評分：展開三項 3 分、數值 2 分）

6. 求兩小時內最少接到一個查詢的概率。

答案：答案：兩小時的查詢數 Y 附從泊松分佈、均值 8。P(Y ⩾ 1) = 1 − P(Y = 0) = 1 − e^(−8)，約為 0.99966。（評分：均值 8 得 2 分、補事件 2 分、數值 2 分）

丙部　正態分佈

本部分共 3 題，合計 18 分，全部須作答。設 X 服從正態分佈，平均值 50、標準差 10。

7. 求 P(X 大於 65)，答案準確至四位小數。

答案：答案：標準化得 z = (65 − 50)/10 = 1.5。P(Z 大於 1.5) = 1 − 0.9332 = 0.0668。（評分：標準化 2 分、查表值 2 分、補概率 2 分）

8. 求 P(40 ⩽ X ⩽ 60)，答案準確至四位小數。

答案：答案：z 值分別為 −1 與 1。P(−1 ⩽ Z ⩽ 1) = 0.8413 − 0.1587 = 0.6827。（評分：兩個 z 值 2 分、查表 2 分、相減 2 分）

9. 求 k，使 P(X 少於 k) = 0.9，答案準確至一位小數。

答案：答案：P(Z 少於 1.2816) = 0.9，故 k = 50 + 1.2816×10 = 62.8。（評分：z 值 3 分、反標準化 2 分、數值 1 分）

丁部　置信區間

本部分共 3 題，合計 18 分，全部須作答。由 100 個樣本算得平均值 12.4、標準差 3.2。

10. 求總體平均值的 95% 置信區間。

答案：答案：標準誤 = 3.2/√100 = 0.32。95% 區間 = 12.4 ± 1.96×0.32，即 (11.7728, 13.0272)，約為 (11.77, 13.03)。（評分：標準誤 2 分、乘數 2 分、上下限 2 分）

11. 求同一資料的 99% 置信區間。

答案：答案：99% 的乘數為 2.5758，區間 = 12.4 ± 2.5758×0.32 = (11.576, 13.224)，約為 (11.58, 13.22)。（評分：乘數 2 分、計算 2 分、區間 2 分）

12. 若要 95% 置信區間的半寬不多於 0.25，樣本容量最少要多少？

答案：答案：由 1.96×3.2/√n ⩽ 0.25 得 √n ⩾ 25.088，即 n ⩾ 629.4，故樣本容量最少為 630。（評分：設定不等式 2 分、平方 2 分、向上取整 2 分）

戊部　梯形法則

本部分共 2 題，合計 16 分，全部須作答。以梯形法則估算 ∫(1 至 3) 1/x dx，取 4 個小區間。

13. 寫出各分點的函數值，並求梯形法則的估算值。

答案：答案：分點為 1、1.5、2、2.5、3，函數值為 1、0.6667、0.5、0.4、0.3333。估算值 = 0.25×[1 + 2(0.6667 + 0.5 + 0.4) + 0.3333] = 0.25×4.4667，約為 1.1167。（評分：分點與函數值 4 分、公式 3 分、中間和 2 分、結果 1 分）

14. 已知該積分的真值為 ln 3，求估算值的誤差與百分誤差。

答案：答案：真值約為 1.0986，誤差 = 1.1167 − 1.0986 = 0.0181，百分誤差 = 0.0181/1.0986×100，約為 1.64%。梯形法則高估，因為函數在區間上凹向上。（評分：真值 2 分、誤差 2 分、百分誤差 2 分）

己部　期望與方差

本部分共 2 題，合計 16 分，全部須作答。離散隨機變數 X 的概率分佈為：X = 0 時 0.2、X = 1 時 0.3、X = 2 時 0.4、X = 3 時 0.1。

15. 求 E(X)、E(X²) 與 Var(X)。

答案：答案：E(X) = 0×0.2 + 1×0.3 + 2×0.4 + 3×0.1 = 1.4；E(X²) = 0 + 0.3 + 1.6 + 0.9 = 2.8；Var(X) = 2.8 − 1.96 = 0.84。（評分：E(X) 3 分、E(X²) 3 分、方差 3 分）

16. 設 $Y = 3X - 2$，求 $E(Y)$ 與 $\mathrm{Var}(Y)$。

答案：答案：$E(Y) = 3E(X) - 2 = 3 \times 1.4 - 2 = 2.2$；$\mathrm{Var}(Y) = 3^2 \mathrm{Var}(X) = 9 \times 0.84 = 7.56$，常數項不影響方差。（評分：$E(Y)$ 3 分、方差倍數 3 分、數值 1 分）

TutorZone S6數學延伸部分單元一練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。