中六數學延伸單元 M2 練習卷：二項式定理、數列與歸納法、三角學、極限與導數、積分、向量與矩陣

中六　數學延伸單元 M2　｜　時限：60 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

第一部分：二項式定理（20 分）

作答時須列出算式，數值答案須準確至所需形式。

1. 展開 (1 + 2x)^8，求 x^3 項的系數。

答案：答案：x^3 項為 C(8,3)(2x)^3 = 56 × 8x^3 = 448x^3，故系數為 448。（評分要點：二項式系數 2 分，次方運算 2 分）

2. 求展開式中 x^4 項的系數，並寫出該項。

答案：答案：C(8,4)(2x)^4 = 70 × 16x^4 = 1120x^4，系數為 1120，該項為 1120x^4。（評分要點：系數 2 分，項 2 分）

3. 求展開式中系數最大的項，並解釋你如何判斷。

答案：答案：相鄰項系數比為 2(8 − k)/(k + 1)，當 k 小於 5 時比值大於 1，k 等於 5 時比值為 1，之後小於 1；故比值在 k = 5 時等於 1，故最大系數同時出現於 k = 5 及 k = 6，系數 C(8,5)(2)^5 = C(8,6)(2)^6 = 56 × 32 = 1792，兩項為 1792x^5 與 1792x^6。（評分要點：比值法 3 分，k = 5 與 6 判斷 1 分，答案 2 分）

4. 求展開式各項系數之和，並說明所用的方法。

答案：答案：令 x = 1，得 (1 + 2)^8 = 3^8 = 6561，故各項系數之和為 6561。（評分要點：代入 x = 1 的構思 3 分，計算 2 分，解釋 1 分）

第二部分：數列與數學歸納法（16 分）

每部分 4 分，須列出所用公式。

5. 等差數列首項為 7，公差為 4。求第 20 項。

答案：答案：T(20) = 7 + 19 × 4 = 83。（評分要點：公式 2 分，答案 2 分）

6. 承上題，求該數列首 20 項之和。

答案：答案：S(20) = 20(7 + 83)/2 = 20 × 90/2 = 900。（評分要點：首末項配對法或公式 2 分，答案 2 分）

7. 等比數列首項為 3，公比為 2。求首 10 項之和。

答案：答案：S(10) = 3(2^10 − 1)/(2 − 1) = 3 × 1023 = 3069。（評分要點：公式 2 分，2^10 計算 1 分，答案 1 分）

8. 用數學歸納法證明：首 n 個奇數之和等於 n^2，並以 n = 10 驗算。

答案：答案：n = 1 時 1 = 1^2 成立；設 n = k 成立，則 1 + 3 + ⋯ + (2k − 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2，故對所有正整數成立。驗算 n = 10：和為 100 = 10^2。（評分要點：奠基 1 分，歸納步驟 2 分，結論與驗算 1 分）

第三部分：三角學（16 分）

除特別指明，角度以度為單位。

9. 解方程 sin θ = 0.5，寫出通解（0 度至 360 度之間的所有解及一般式）。

答案：答案：基本角為 30 度；在 0 至 360 度之間，θ = 30 度或 150 度；通解為 θ = 30 + 360k 或 150 + 360k，k 為整數。（評分要點：基本角 1 分，兩個解 2 分，一般式 1 分）

10. 已知 tan θ = 3/4 且 θ 在第三象限，求 sin θ 與 cos θ 的準確值。

答案：答案：由 3-4-5 直角三角形，斜邊為 5；第三象限正弦與餘弦均為負，故 sin θ = −3/5，cos θ = −4/5。（評分要點：斜邊 1 分，符號判斷 2 分，數值 1 分）

11. 證明恆等式 (1 − cos 2θ) / sin 2θ = tan θ（θ 使分母不為零）。

答案：答案：1 − cos 2θ = 2sin^2 θ，sin 2θ = 2 sin θ cos θ，相除得 (2sin^2 θ)/(2 sin θ cos θ) = sin θ / cos θ = tan θ。（評分要點：倍角公式 2 分，化簡 1 分，結論 1 分）

12. 求 3 sin θ + 4 cos θ 的最大值，並指出取最大值時的 tan θ。

答案：答案：先合併為 R sin(θ + α)，其中 R = √(3^2 + 4^2) = 5，故最大值為 5；取最大值時 sin θ 與 cos θ 同號，tan θ = 3/4。（評分要點：R = 5 得 2 分，最大值 1 分，tan θ 1 分）

第四部分：極限與導數（16 分）

須寫出求導法則或極限步驟。

13. 求 lim (x → 3) (x^2 − 9)/(x − 3)。

答案：答案：分子因式分解為 (x − 3)(x + 3)，約去 x − 3 後得 x + 3，代入 x = 3 得 6。（評分要點：因式分解 2 分，代入 2 分）

14. 曲線 y = x^3 − 2x。求 x = 1 處的切線方程。

答案：答案：y(1) = 1 − 2 = −1，dy/dx = 3x^2 − 2，在 x = 1 時斜率為 1；切線為 y + 1 = 1(x − 1)，即 y = x − 2。（評分要點：點坐標 1 分，斜率 2 分，方程 1 分）

15. 求 d/dx [x^3 ln x]（x 大於 0）。

答案：答案：用乘積法則，得 3x^2 ln x + x^3 × (1/x) = 3x^2 ln x + x^2。（評分要點：乘積法則 2 分，化簡 2 分）

16. 求 y = x^3 − 3x 的駐點，並判斷各駐點的性質。

答案：答案：dy/dx = 3x^2 − 3 = 0，得 x = ±1；二階導數 6x，x = −1 時為 −6（極大，y = 2），x = 1 時為 6（極小，y = −2）。（評分要點：駐點 2 分，性質判斷 2 分）

第五部分：積分與面積（16 分）

定積分須寫出原函數及上下限代入。

17. 求 ∫ 由 0 至 2 (3x^2 + 2x) dx。

答案：答案：原函數為 x^3 + x^2；代入上限 2 得 8 + 4 = 12，下限 0 得 0，故積分值為 12。（評分要點：原函數 2 分，代入計算 2 分）

18. 求曲線 y = x 與 y = x^2 在 0 至 1 之間所圍成的面積。

答案：答案：面積 = ∫ (x − x^2) dx 由 0 至 1 = 1/2 − 1/3 = 1/6，約 0.167 平方單位。（評分要點：被積函數 2 分，計算 1 分，答案 1 分）

19. 用分部積分求 ∫ 由 0 至 1 x e^x dx。

答案：答案：設 u = x，dv = e^x dx，得原函數 e^x(x − 1)；代入 1 得 0，代入 0 得 −1，故積分值為 1。（評分要點：分部積分 2 分，上下限代入 2 分）

20. 求 ∫ 由 1 至 2 (1/x) dx，答案以 ln 表示並取三位小數。

答案：答案：原函數為 ln x，故積分值為 ln 2 − ln 1 = ln 2，約 0.693。（評分要點：原函數 2 分，準確值 1 分，小數 1 分）

第六部分：向量與矩陣（16 分）

數值答案如非整數，取三位小數。

21. 已知 a = (2, −1, 3)，b = (1, 4, −2)。求 a · b。

答案：答案：a · b = 2(1) + (−1)(4) + 3(−2) = 2 − 4 − 6 = −8。（評分要點：逐項相乘 2 分，合計 2 分）

22. 求 a 與 b 的長度，並求兩者夾角（準確至一位小數）。

答案：答案：|a| = √14 ≈ 3.742，|b| = √21 ≈ 4.583；cos θ = −8/(√14 × √21) ≈ −0.467，故 θ ≈ 117.8 度。（評分要點：長度 2 分，餘弦值 1 分，角度 1 分）

23. 求 a × b，並說明該向量與 a、b 的位置。

答案：答案：a × b = ((−1)(−2) − 3(4), 3(1) − 2(−2), 2(4) − (−1)(1)) = (−10, 7, 9)；此向量同時垂直於 a 與 b。（評分要點：叉積 3 分，垂直性質 1 分）

24. 矩陣 A = 行向量 (3, 1) 與 (2, 4)。求 det A，並求 A 的逆矩陣。

答案：答案：det A = 3(4) − 1(2) = 10；A 的逆矩陣為 (1/10) × 行向量 (4, −1) 與 (−2, 3)，即行向量 (0.4, −0.1) 與 (−0.2, 0.3)。（評分要點：行列式 2 分，逆矩陣 2 分）

TutorZone 中六數學延伸單元 M2練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。