中六数学延伸部分单元一练习卷：二项式定理、指数与对数函数、微分与应用、积分与面积、概率与离散随机变量、二项泊松与正态分布

中六　数学延伸部分单元一　|　时限：75 分钟　|　总分：100 分　|　共 24 题

第一部分：二项式定理（16 分）

答案须列出所用公式，系数须为最简形式。

1. 展开 (1 + 2x)^5 时，(a) 求 x^3 的系数；(b) 求 x^4 的系数。
答案：(a) C(5,3) × 2^3 = 10 × 8 = 80。(b) C(5,4) × 2^4 = 5 × 16 = 80。

2. 在 (2x + 3/x)^6 的展开式中，(a) 求常数项；(b) 求 x^2 的系数。
答案：通项 = C(6,r) (2x)^(6-r) (3/x)^r。(a) 常数项须 r = 3，得 C(6,3) × 2^3 × 3^3 = 4320。(b) x^2 须 r = 2，得 C(6,2) × 2^4 × 3^2 = 2160。

3. 已知 (1 + x)^n 的展开式中 x^2 的系数为 45。(a) 求 n；(b) 求 x^3 的系数。
答案：(a) n(n−1)/2 = 45，得 $n^2 - n - 90 = 0$，n = 10。(b) C(10,3) = 120。

4. 在 (1 − x/2)^8 的展开式中，(a) 求 x^3 的系数；(b) 求各项系数之和。
答案：(a) C(8,3) × (−1/2)^3 = 56 × (−0.125) = -7。(b) 代入 x = 1，和 = (1 − 0.5)^8 = 0.00390625。

第二部分：指数与对数函数（16 分）

取四位小数，除非答案为整数。

5. 解方程 2^x = 5，答案取四位小数。
答案：x = ln5 / ln2 = 2.3219。

6. (a) 求 $\log_2 48 - \log_2 3$。(b) 求 $\log_a 9 \div \log_a 3$（$a > 0$，$a \neq 1$）。
答案：(a) $\log_2 (48 \div 3) = \log_2 16 = 4$。(b) $\log_a(9 \div 3) = \log_a 3 = 1$，故比值 = 2。

7. 一部机器价值 V = 20000e^(−0.08t) 元，t 为年数。(a) 求 10 年后的价值。(b) 求价值减半所需年数。
答案：(a) V = 20000e^(−0.8) = 8986.58 元。(b) e^(−0.08t) = 0.5，t = ln2 ÷ 0.08 = 8.6643 年。

8. 解方程 log x + log(x − 3) = 1（常用对数），并说明剔除不合法根的理由。
答案：x(x − 3) = 10，$x^2 - 3x - 10 = 0$，(x − 5)(x + 2) = 0。x = −2 使 log x 无定义，故 x = 5。

第三部分：微分法与应用（18 分）

须以导数判别极值的性质。

9. 设 $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$。(a) 求驻点；(b) 判别各驻点的性质。
答案：(a) $dy/dx = 3x^2 - 12x + 9 = 0$，x = 1 或 3；y(1) = 6，y(3) = 2。(b) $y'' = 6x - 12$，在 x = 1 为 -6（极大），在 x = 3 为 6（极小）。

10. 设 y = x e^(2x)。(a) 求 dy/dx。(b) 求曲线在 x = 0 处的切线斜率。

答案：(a) dy/dx = e^(2x) + 2x e^(2x) = e^(2x)(1 + 2x)。(b) 在 x = 0，斜率 = $e^0 \times 1 = 1$。

11. 设 y = ln(x² + 1)。(a) 求 dy/dx。(b) 求曲线在 x = 1 处的切线方程。

答案：(a) dy/dx = 2x/(x² + 1)。(b) 在 x = 1，y = ln2 = 0.6931，斜率 = 1，切线为 y = x − 0.3069。

12. 曲线 y = x² 上点 P(3, 9)。(a) 求 P 点的切线方程。(b) 求 P 点的法线方程。

答案：(a) dy/dx = 2x，在 P 点斜率 6，切线 y = 6x − 9。(b) 法线斜率 −1/6，即 x + 6y = 57。

第四部分：积分法与面积（18 分）

不定积分须加积分常数。

13. 计算 $\int_1^4 (3x^2 - 2x)\,dx$。

答案：原函数 = x³ − x²，代入上下限：(64 − 16) − (1 − 1) = 48。

14. (a) 求 $\int x\,e^{(x^2)}\,dx$。(b) 由此计算 $\int_0^1 x\,e^{(x^2)}\,dx$，取四位小数。

答案：(a) 令 u = x²，得 (1/2)e^(x²) + C。(b) 值 = (e − 1)/2 = 0.8591。

15. 求曲线 y = x² 与直线 y = 2x 所围成的面积。

答案：交点：x² = 2x，x = 0 或 2。面积 = $\int_0^2 (2x - x^2)\,dx = [x^2 - x^3/3]_0^2 = 4 - 8/3 = 1.3333$。

16. 已知 $\int_0^k 2x\,dx = 16$（k > 0）。(a) 求 k。(b) 由此求 $\int_0^k (2x + 3)\,dx$。

答案：(a) $[x^2]_0^k = k^2 = 16$，k = 4。(b) 16 + 3 × 4 = 28。

第五部分：概率与离散随机变量（16 分）

概率取四位小数，除非为分数。

17. 离散随机变量 X 的分布为 P(X = 0) = 0.3、P(X = 1) = 0.5、P(X = 2) = 0.2。(a) 求 E(X)。(b) 求 Var(X)。

答案：(a) E(X) = 0 × 0.3 + 1 × 0.5 + 2 × 0.2 = 0.90。(b) E(X²) = 1.3，Var(X) = 1.3 − 0.81 = 0.49。

18. 袋中有 5 个红球、3 个蓝球，随机抽出 2 个（不放回）。(a) 求两个皆为红球的概率。(b) 求一红一蓝的概率。

答案：(a) C(5,2)/C(8,2) = 10/28 = 0.3571。(b) (5 × 3)/28 = 15/28 = 0.5357。

19. 已知 P(A) = 0.6、P(B) = 0.5，且 A、B 独立。(a) 求 P(A ∩ B)。(b) 求 P(A ∪ B)。(c) 求 P(A | B)。

答案：(a) 0.3。(b) 0.6 + 0.5 − 0.3 = 0.8。(c) 因独立，P(A | B) = P(A) = 0.6。

20. 某游戏胜出可赢 $10（概率 0.2），输则付 $3（概率 0.8）。(a) 求每局的期望收益。(b) 若游戏公平，胜出应派多少奖金？

答案：(a) 10 × 0.2 − 3 × 0.8 = 2 − 2.4 = -0.4 元，即平均每局蚀 0.4 元。(b) 公平即期望值为 0，设奖金 x：0.2x − 2.4 = 0，x = 12 元。

第六部分：二项、泊松与正态分布（16 分）

正态分布题目可用标准正态分布表。

21. X ~ B(10, 0.3)。(a) 求 P(X = 3)。(b) 求 X 的平均值与方差。

答案：(a) $C(10,3) \times 0.3^3 \times 0.7^7 = 0.2668$。(b) 平均 $= 10 \times 0.3 = 3$，方差 $= 10 \times 0.3 \times 0.7 = 2.1$。

22. 某热线每分钟平均接到 4 个电话，Y ~ Po(4)。(a) 求一小时内没有电话的几率。(b) 求至少有一个电话的几率。

答案：(a) P(Y = 0) = e^(−4) = 0.0183。(b) $P(Y \geqslant 1) = 1 - 0.0183 = 0.9817$。

23. 某科成绩呈正态分布，平均 60 分，标准差 8 分。(a) 求得分高于 72 分的比例。(b) 求只有 10% 考生能达到的分数线。

答案：(a) $z = (72 - 60)/8 = 1.5$，比例 $= 1 - 0.9332 = 0.0668$。(b) $z = 1.2816$，分数 $= 60 + 8 \times 1.2816 = 70.25$。

24. 掷一枚均匀硬币 100 次，以正态分布近似求正面次数介乎 45 至 55 次的概率（用连续性修正）。

答案：平均 50、标准差 5，连续性修正 44.5 至 55.5，$z = \pm 1.1$，概率 $= 2 \times 0.8643 - 1 = 0.7287$。

TutorZone 中六数学延伸部分单元一练习卷｜题目与文章为原创，并非任何学校或出版社的教材。