中六數學延伸部分單元一練習卷：二項式定理、指數與對數函數、微分與應用、積分與面積、概率與離散隨機變量、二項泊松與正態分佈

中六　數學延伸部分單元一　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

第一部分：二項式定理（16 分）

答案須列出所用公式，係數須為最簡形式。

1. 展開 (1 + 2x)^5 時，(a) 求 x^3 的係數；(b) 求 x^4 的係數。
答案：(a) C(5,3) × 2^3 = 10 × 8 = 80。(b) C(5,4) × 2^4 = 5 × 16 = 80。

2. 在 (2x + 3/x)^6 的展開式中，(a) 求常數項；(b) 求 x^2 的係數。
答案：通項 = C(6,r) (2x)^(6-r) (3/x)^r。(a) 常數項須 r = 3，得 C(6,3) × 2^3 × 3^3 = 4320。(b) x^2 須 r = 2，得 C(6,2) × 2^4 × 3^2 = 2160。

3. 已知 (1 + x)^n 的展開式中 x^2 的係數為 45。(a) 求 n；(b) 求 x^3 的係數。
答案：(a) n(n−1)/2 = 45，得 $n^2 - n - 90 = 0$，n = 10。(b) C(10,3) = 120。

4. 在 (1 − x/2)^8 的展開式中，(a) 求 x^3 的係數；(b) 求各項係數之和。
答案：(a) C(8,3) × (−1/2)^3 = 56 × (−0.125) = -7。(b) 代入 x = 1，和 = (1 − 0.5)^8 = 0.00390625。

第二部分：指數與對數函數（16 分）

取四位小數，除非答案為整數。

5. 解方程 2^x = 5，答案取四位小數。
答案：x = ln5 / ln2 = 2.3219。

6. (a) 求 $\log_2 48 - \log_2 3$。(b) 求 $\log_a 9 \div \log_a 3$（$a > 0$，$a \neq 1$）。
答案：(a) $\log_2 (48 \div 3) = \log_2 16 = 4$。(b) $\log_a(9 \div 3) = \log_a 3 = 1$，故比值 = 2。

7. 一部機器價值 V = 20000e^(−0.08t) 元，t 為年數。(a) 求 10 年後的價值。(b) 求價值減半所需年數。
答案：(a) V = 20000e^(−0.8) = 8986.58 元。(b) e^(−0.08t) = 0.5，t = ln2 ÷ 0.08 = 8.6643 年。

8. 解方程 log x + log(x − 3) = 1（常用對數），並說明剔除不合法根的理由。
答案：$x(x - 3) = 10$，$x^2 - 3x - 10 = 0$，$(x - 5)(x + 2) = 0$。x = −2 使 log x 無定義，故 x = 5。

第三部分：微分法與應用（18 分）

須以導數判別極值的性質。

9. 設 $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$。(a) 求駐點；(b) 判別各駐點的性質。
答案：(a) $dy/dx = 3x^2 - 12x + 9 = 0$，x = 1 或 3；y(1) = 6，y(3) = 2。(b) $y'' = 6x - 12$，在 x = 1 為 -6（極大），在 x = 3 為 6（極小）。

10. 設 $y = x\,e^{(2x)}$。(a) 求 dy/dx。(b) 求曲線在 $x = 0$ 處的切線斜率。

答案：(a) $dy/dx = e^{(2x)} + 2x\,e^{(2x)} = e^{(2x)}(1 + 2x)$。(b) 在 $x = 0$，斜率 $= e^{0} \times 1 = 1$。

11. 設 $y = \ln(x^2 + 1)$。(a) 求 dy/dx。(b) 求曲線在 $x = 1$ 處的切線方程。

答案：(a) $dy/dx = 2x/(x^2 + 1)$。(b) 在 $x = 1$，$y = \ln 2 = 0.6931$，斜率 $= 1$，切線為 $y = x - 0.3069$。

12. 曲線 $y = x^2$ 上點 $P(3, 9)$。(a) 求 P 點的切線方程。(b) 求 P 點的法線方程。

答案：(a) $dy/dx = 2x$，在 P 點斜率 6，切線 $y = 6x - 9$。(b) 法線斜率 $-1/6$，即 $x + 6y = 57$。

第四部分：積分法與面積（18 分）

不定積分須加積分常數。

13. 計算 $\int_{1}^{4} (3x^2 - 2x)\,dx$。

答案：原函數 $= x^3 - x^2$，代入上下限：$(64 - 16) - (1 - 1) = 48$。

14. (a) 求 $\int x\,e^{(x^2)}\,dx$。(b) 由此計算 $\int_{0}^{1} x\,e^{(x^2)}\,dx$，取四位小數。

答案：(a) 令 $u = x^2$，得 $(1/2)e^{(x^2)} + C$。(b) 值 $= (e - 1)/2 = 0.8591$。

15. 求曲線 $y = x^2$ 與直線 $y = 2x$ 所圍成的面積。

答案：交點：$x^2 = 2x$，$x = 0$ 或 2。面積 $= \int_{0}^{2} (2x - x^2)\,dx = [x^2 - x^3/3]_{0}^{2} = 4 - 8/3 = 1.3333$。

16. 已知 $\int_{0}^{k} 2x\,dx = 16$（$k > 0$）。(a) 求 k。(b) 由此求 $\int_{0}^{k} (2x + 3)\,dx$。

答案：(a) $[x^2]_{0}^{k} = k^2 = 16$，$k = 4$。(b) $16 + 3 \times 4 = 28$。

第五部分：概率與離散隨機變量（16 分）

概率取四位小數，除非為分數。

17. 離散隨機變量 X 的分佈為 $P(X = 0) = 0.3$、$P(X = 1) = 0.5$、$P(X = 2) = 0.2$。(a) 求 $E(X)$。(b) 求 $\mathrm{Var}(X)$。

答案：(a) $E(X) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.2 = 0.90$。(b) $E(X^2) = 1.3$，$\mathrm{Var}(X) = 1.3 - 0.81 = 0.49$。

18. 袋中有 5 個紅球、3 個藍球，隨機抽出 2 個（不放回）。(a) 求兩個皆為紅球的概率。(b) 求一紅一藍的概率。

答案：(a) $C(5,2)/C(8,2) = 10/28 = 0.3571$。(b) $(5 \times 3)/28 = 15/28 = 0.5357$。

19. 已知 $P(A) = 0.6$、$P(B) = 0.5$，且 A、B 獨立。(a) 求 $P(A \cap B)$。(b) 求 $P(A \cup B)$。(c) 求 $P(A \mid B)$。

答案：(a) 0.3。(b) $0.6 + 0.5 - 0.3 = 0.8$。(c) 因獨立，$P(A \mid B) = P(A) = 0.6$。

20. 某遊戲勝出可贏 \$10（概率 0.2），輸則付 \$3（概率 0.8）。(a) 求每局的期望收益。(b) 若遊戲公平，勝出應派多少獎金？

答案：(a) $10 \times 0.2 - 3 \times 0.8 = 2 - 2.4 = -0.4$ 元，即平均每局蝕 0.4 元。(b) 公平即期望值為 0，設獎金 x：$0.2x - 2.4 = 0$，$x = 12$ 元。

第六部分：二項、泊松與正態分佈（16 分）

正態分佈題目可用標準正態分佈表。

21. $X \sim B(10, 0.3)$。(a) 求 $P(X = 3)$。(b) 求 X 的平均值與方差。

答案：(a) $C(10,3) \times 0.3^3 \times 0.7^7 = 0.2668$。(b) 平均 $= 10 \times 0.3 = 3$，方差 $= 10 \times 0.3 \times 0.7 = 2.1$。

22. 某熱線每分鐘平均接到 4 個電話，$Y \sim Po(4)$。(a) 求一小時內沒有電話的機率。(b) 求至少有一個電話的機率。

答案：(a) $P(Y = 0) = e^{-4} = 0.0183$。(b) $P(Y \geqslant 1) = 1 - 0.0183 = 0.9817$。

23. 某科成績呈正態分佈，平均 60 分，標準差 8 分。(a) 求得分高於 72 分的比例。(b) 求只有 10% 考生能達到的分數線。

答案：(a) $z = (72 - 60)/8 = 1.5$，比例 $= 1 - 0.9332 = 0.0668$。(b) $z = 1.2816$，分數 $= 60 + 8 \times 1.2816 = 70.25$。

24. 擲一枚均勻硬幣 100 次，以正態分佈近似求正面次數介乎 45 至 55 次的概率（用連續性修正）。

答案：平均 50、標準差 5，連續性修正 44.5 至 55.5，$z = \pm 1.1$，概率 $= 2 \times 0.8643 - 1 = 0.7287$。

TutorZone 中六數學延伸部分單元一練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。