中六数学（延伸部分单元二 M2）练习卷（第一份）｜归纳法、二项式、三角、微积分与向量

练习卷 · 高中数学（延伸部分单元二）

中六数学（延伸部分单元二 M2）练习卷（第一份），适合校内考试及 DSE 备试，涵盖数学归纳法与等差等比数列求和、二项式定理与常数项系数、三角恒等式双角公式与三角方程、极限与求导技巧、定积分与曲线间面积、矩阵行列式与向量点积叉积，每题附完整算式步骤及答案。

1. 数学归纳法与数列（16 分）

须列式，答案取整数。

#	Question	Answer and marking notes
1	(a) 求 1 + 3 + 5 + … + 39 之和，并写出项数。	项数 n = (39 + 1) ÷ 2 = 20；和 = n^2 = 20^2 = 400。
2	(b) 等比数列首项 3、公比 2。求第 8 项 T8 及首 8 项之和 S8。	T8 = 3 × 2^7 = 384；S8 = 3(2^8 − 1) ÷ (2 − 1) = 765。
3	(c) 等差数列首项 7、公差 5。求第 20 项及首 20 项之和。	T20 = 7 + 19 × 5 = 102；S20 = 20(7 + 102) ÷ 2 = 1090。
4	(d) 以数学归纳法证明 $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = [n(n+1)/2]^2$，并用 n = 10 验证两边相等。	奠基 n = 1：左 = 1，右 = 1^2 = 1；设 n = k 成立，加 $(k+1)^3$ 后得 $[(k+1)(k+2)/2]^2$，故成立。n = 10：左 = 3025，右 = $(55)^2$ = 3025，两边相等。

2. 二项式定理（18 分）

须写出通项，系数为整数。

#	Question	Answer and marking notes
5	(a) 求 (1 + 2x)^8 展开式中 x^3 的系数。	通项 = C(8,r)(2x)^r；r = 3 时系数 = C(8,3) × 2^3 = 56 × 8 = 448。
6	(b) 求 (x − 3/x)^6 展开式中的常数项。	通项 = C(6,r)x^(6−r)(−3/x)^r = C(6,r)(−3)^r x^(6−2r)；6 − 2r = 0 得 r = 3，常数项 = C(6,3) × $(-3)^3$ = 20 × (−27) = −540。
7	(c) 求 (2 + x)^10 展开式中 x^7 的系数。	系数 = C(10,7) × 2^3 = 120 × 8 = 960。
8	(d) 求 (2 + x)^10 展开式所有系数之和，并说明所用方法。	令 x = 1，则所有系数和 = (2 + 1)^10 = 3^10 = 59049。

3. 三角恒等式与方程（16 分）

θ 为锐角；方程答案以度为单位。

#	Question	Answer and marking notes
9	(a) 已知 $\sin\theta = 3/5$ 且 θ 为锐角，求 $\cos\theta$ 及 $\tan\theta$。	$\cos\theta = 4/5 = 0.8$；$\tan\theta = 3/4 = 0.75$（3–4–5 直角三角形）。

#	Question	Answer and marking notes
10	(b) 用 (a) 的资料求 sin 2θ 及 cos 2θ 的值。	sin 2θ = 2sinθ cosθ = 2 × 0.6 × 0.8 = 0.96；cos 2θ = 1 − 2sin²θ = 1 − 0.72 = 0.28。
11	(c) 解方程 2sin²x − sin x − 1 = 0，其中 0° ⩽ x ⩽ 360°。	(2sinx + 1)(sinx − 1) = 0，得 sinx = −1/2 或 1；故 x = 210°、330°、90°。
12	(d) 已知 tan A = 1/2、tan B = 1/3，求 tan(A + B) 及其对应的锐角。	tan(A+B) = (1/2 + 1/3) ÷ (1 − 1/6) = (5/6) ÷ (5/6) = 1，故 A + B = 45°。

4. 极限与求导（18 分）

须列步骤；数值取三位小数。

#	Question	Answer and marking notes
13	(a) 求 lim (x→3) (x² − 9)/(x − 3)。	分子因式分解为 (x − 3)(x + 3)，约去后得 x + 3，代入 x = 3 得 6。
14	(b) 设 y = x³e^(2x)。求 dy/dx，并求 x = 1 时的斜率。	dy/dx = 3x²e^(2x) + 2x³e^(2x) = x²e^(2x)(3 + 2x)；x = 1 时斜率 = 5e² = 36.945。
15	(c) 设 y = ln(x² + 1)。求 dy/dx，并求 x = 2 时的斜率。	dy/dx = 2x/(x² + 1)；x = 2 时斜率 = 4/5 = 0.8。
16	(d) 曲线 y = x³ − 3x² + 2。求所有驻点，并用二阶导数判断其性质。	y’ = 3x² − 6x = 3x(x − 2)，驻点 x = 0 及 2；y” = 6x − 6，x = 0 时为 −6（极大，y = 2），x = 2 时为 +6（极小，y = −2）。

5. 定积分与面积（16 分）

须写出原函数，面积取三位小数。

#	Question	Answer and marking notes
17	(a) 求 ∫₀ ² (3x² + 2x) dx。	原函数 x³ + x²；代入上下限得 (8 + 4) − 0 = 12。
18	(b) 求 ∫₁ ^e (1/x) dx。	原函数 ln x；得 ln e − ln 1 = 1。
19	(c) 求 ∫₀ ¹ x e^x dx。	用分部积分：∫x e^x dx = e^x(x − 1)；代入得 e(0) − 1(−1) = 1。
20	(d) 求由 y = 2x 与 y = x² 所围区域的面积。	交点 x² = 2x 得 x = 0 及 2；面积 = ∫₀ ² (2x − x²) dx = [x² − x³/3] = 4 − 8/3 = 1.333 平方单位。

6. 矩阵、行列式与向量（16 分）

向量以分量作答，角度取一位小数。

#	Question	Answer and marking notes
21	(a) 设 A = [[2, 1], [3, 4]]。求 det A 及 A⁻¹。	det A = 2×4 − 1×3 = 5；A⁻¹ = (1/5)[[4, −1], [−3, 2]]。
22	(b) 设 B = [[1, 2], [2, 1]]。求 det B，并判断 B 是否可逆。	det B = 1×1 − 2×2 = −3，不等于 0，故 B 可逆。

#	Question	Answer and marking notes
23	(c) 设 a = (2, −1, 3)、b = (1, 4, −2)。求 a·b 及两向量夹角。	a·b = 2 − 4 − 6 = −8；|a| = $\sqrt{14}$、|b| = $\sqrt{21}$；$\cos\theta = -8/\sqrt{294} = -0.467$，$\theta \approx 117.8^\circ$。
24	(d) 用 (c) 的 a、b 求 a × b。	a × b = ((−1)(−2) − (3)(4), (3)(1) − (2)(−2), (2)(4) − (−1)(1)) = (−10, 7, 9)。