中六數學

中六　數學（延伸部分單元二）　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

1. 數學歸納法與數列（16 分）

須列式，答案取整數。

1. (a) 求 1 + 3 + 5 + ⋯ + 39 之和，並寫出項數。

答案：項數 n = (39 + 1) ÷ 2 = 20；和 = $n^2 = 20^2 = 400$。

2. (b) 等比數列首項 3、公比 2。求第 8 項 T8 及首 8 項之和 S8。

答案：T8 = 3 × 2^7 = 384；S8 = 3(2^8 - 1) ÷ (2 - 1) = 765。

3. (c) 等差數列首項 7、公差 5。求第 20 項及首 20 項之和。

答案：T20 = 7 + 19 × 5 = 102；S20 = 20(7 + 102) ÷ 2 = 1090。

4. (d) 以數學歸納法證明 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = [n(n+1)/2]^2$，並用 n = 10 驗證兩邊相等。

答案：奠基 n = 1：左 = 1，右 = $1^2 = 1$；設 n = k 成立，加 $(k+1)^3$ 後得 $[(k+1)(k+2)/2]^2$，故成立。n = 10：左 = 3025，右 = $(55)^2 = 3025$，兩邊相等。

2. 二項式定理（18 分）

須寫出通項，係數為整數。

5. (a) 求 (1 + 2x)^8 展開式中 x^3 的係數。

答案：通項 = C(8,r)(2x)^r；r = 3 時係數 = $C(8,3) \times 2^3 = 56 \times 8 = 448$。

6. (b) 求 (x - 3/x)^6 展開式中的常數項。

答案：通項 = C(6,r)x^(6-r)(-3/x)^r = C(6,r)(-3)^r x^(6-2r)；6 - 2r = 0 得 r = 3，常數項 = $C(6,3) \times (-3)^3 = 20 \times (-27) = -540$。

7. (c) 求 (2 + x)^10 展開式中 x^7 的係數。

答案：係數 = $C(10,7) \times 2^3 = 120 \times 8 = 960$。

8. (d) 求 (2 + x)^10 展開式所有係數之和，並說明所用方法。

答案：令 x = 1，則所有係數和 = (2 + 1)^10 = 3^10 = 59049。

3. 三角恆等式與方程（16 分）

θ 為銳角；方程答案以度為單位。

9. (a) 已知 $\sin\theta = 3/5$ 且 θ 為銳角，求 $\cos\theta$ 及 $\tan\theta$。

答案：$\cos\theta = 4/5 = 0.8$；$\tan\theta = 3/4 = 0.75$（3-4-5 直角三角形）。

10. (b) 用 (a) 的資料求 $\sin 2\theta$ 及 $\cos 2\theta$ 的值。

答案：$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \times 0.6 \times 0.8 = 0.96$；$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 0.72 = 0.28$。

11. (c) 解方程 2sin²x - sin x - 1 = 0，其中 0° ⩽ x ⩽ 360° 。

答案：(2sinx + 1)(sinx - 1) = 0，得 sinx = -1/2 或 1；故 x = 210° 、330° 、90° 。

12. (d) 已知 tan A = 1/2、tan B = 1/3，求 tan(A + B) 及其對應的銳角。

答案：tan(A+B) = (1/2 + 1/3) ÷ (1 - 1/6) = (5/6) ÷ (5/6) = 1，故 A + B = 45° 。

4. 極限與求導（18 分）

須列步驟；數值取三位小數。

13. (a) 求 lim (x→3) (x² - 9)/(x - 3)。

答案：分子因式分解為 (x - 3)(x + 3)，約去後得 x + 3，代入 x = 3 得 6。

14. (b) 設 y = x³e^(2x)。求 dy/dx，並求 x = 1 時的斜率。

答案：dy/dx = 3x²e^(2x) + 2x³e^(2x) = x²e^(2x)(3 + 2x)；x = 1 時斜率 = 5e² = 36.945。

15. (c) 設 y = ln(x² + 1)。求 dy/dx，並求 x = 2 時的斜率。

答案：dy/dx = 2x/(x² + 1)；x = 2 時斜率 = 4/5 = 0.8。

16. (d) 曲線 y = x³ - 3x² + 2。求所有駐點，並用二階導數判斷其性質。

答案：y' = 3x² - 6x = 3x(x - 2)，駐點 x = 0 及 2；y'' = 6x - 6，x = 0 時為 -6（極大，y = 2），x = 2 時為 +6（極小，y = -2）。

5. 定積分與面積（16 分）

須寫出原函數，面積取三位小數。

17. (a) 求 ∫₀ ² (3x² + 2x) dx。

答案：原函數 x³ + x²；代入上下限得 (8 + 4) - 0 = 12。

18. (b) 求 ∫₁ ^e (1/x) dx。

答案：原函數 ln x；得 ln e - ln 1 = 1。

19. (c) 求 ∫₀ ¹ x e^x dx。

答案：用分部積分：∫ x e^x dx = e^x(x - 1)；代入得 e(0) - 1(-1) = 1。

20. (d) 求由 y = 2x 與 y = x² 所圍區域的面積。

答案：交點 x² = 2x 得 x = 0 及 2；面積 = ∫₀ ² (2x - x²) dx = [x² - x³/3] = 4 - 8/3 = 1.333 平方單位。

6. 矩陣、行列式與向量（16 分）

向量以分量作答，角度取一位小數。

21. (a) 設 A = [[2, 1], [3, 4]]。求 det A 及 A⁻¹。

答案：det A = 2×4 - 1×3 = 5；A⁻¹ = (1/5)[[4, -1], [-3, 2]]。

22. (b) 設 B = [[1, 2], [2, 1]]。求 det B，並判斷 B 是否可逆。

答案：det B = 1×1 - 2×2 = -3，不等於 0，故 B 可逆。

23. (c) 設 $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$、$\mathbf{b} = (1, 4, -2)$。求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 及兩向量夾角。

答案： $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 - 4 - 6 = -8$；$|\mathbf{a}| = \sqrt{14}$、$|\mathbf{b}| = \sqrt{21}$；$\cos\theta = -8/\sqrt{294} = -0.467$，$\theta \approx 117.8^\circ$。

24. (d) 用 (c) 的 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 求 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$。

答案： $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ((-1)(-2) - (3)(4), (3)(1) - (2)(-2), (2)(4) - (-1)(1)) = (-10, 7, 9)$。

TutorZone 中六數學（延伸部分單元二）練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。