# 中六数学延伸部分单元二练习卷（第一份）｜极限、求导、积分、矩阵、向量、二项分布、最优化

**练习卷 · 高中数学延伸**

中六数学延伸部分单元二（M2）练习卷（第一份），按香港高中数学延伸课程编排，适合校内测验及文凭试备试，涵盖极限与求导技巧、隐函数求导与极值判别、积分代换与分部积分、旋转体体积、矩阵与线性方程组、向量内积与叉积、二项分布，以及无盖水箱的表面积最优化，每题附完整答案与步骤，并列出常见失分位。

## 1. 极限与求导技巧（16 分）

*设 f(x) = e^(2x) ln x，曲线 C 为 x² + y² = 25，另一函数 g(x) = x³ − 3x。*

| # | Question | Answer and marking notes |
|---|---|---|
| 1 | （a）求 lim(x→0) (sin 3x) / x。 | 答案：当 x→0 时 sin 3x ≈ 3x，故 (sin 3x)/x → 3；亦可写成 3 × lim(sin 3x)/(3x) = 3 × 1 = 3。 |
| 2 | （b）求 f′(x)，并求 f′(1) 的准确值。 | 答案：用积法则，f′(x) = 2e^(2x) ln x + e^(2x)/x；代入 x = 1 得 f′(1) = 2e + e = 3e ≈ 8.15。 |
| 3 | （c）在 C 上的点 (3, 4)，求 dy/dx。 | 答案：两边对 x 求导得 2x + 2y(dy/dx) = 0，故 dy/dx = −x/y；在 (3, 4) 得 dy/dx = −3/4 = −0.75。 |
| 4 | （d）求 g(x) 的极大点与极小点，并判别其性质。 | 答案：g′(x) = 3x² − 3 = 0 得 x = 1 或 x = −1；g″(x) = 6x，g″(1) = 6 > 0 故 x = 1 为极小点，g(1) = −2；g″(−1) = −6 为负数 故 x = −1 为极大点，g(−1) = 2。 |

## 2. 积分技巧与旋转体体积（16 分）

*计算以下各项，答案可取小数三位。*

| # | Question | Answer and marking notes |
|---|---|---|
| 5 | （a）求 ∫(1→2) (3x² + 2x) dx 的准确值。 | 答案：原函数为 x³ + x²，代入上下限得 (8 + 4) − (1 + 1) = 10。 |
| 6 | （b）用分部积分求 ∫(0→1) x e^x dx 的准确值。 | 答案：令 u = x、dv = e^x dx，则 du = dx、v = e^x；积分 = [x e^x](0→1) − ∫(0→1) e^x dx = e − (e − 1) = 1。 |
| 7 | （c）用代换法求 ∫(0→1) 2x/(x² + 1) dx，取小数三位。 | 答案：令 u = x² + 1，du = 2x dx，积分 = ln(x² + 1) 由 0 到 1 = ln 2 − ln 1 = ln 2 ≈ 0.693。 |
| 8 | （d）曲线 y = √x 由 x = 0 至 x = 4 绕 x 轴旋转，求旋转体体积（以 π 表示）。 | 答案：V = π∫(0→4) x dx = π[x²/2](0→4) = 8π ≈ 25.133 立方单位。 |

## 3. 矩阵与线性方程组（18 分）

*设 A = [[2, 1], [5, 3]]，另有方程组 2x + y = 7、5x + 3y = 18。*

| # | Question | Answer and marking notes |
|---|---|---|
| 9 | （a）求 det A 及 A 的逆矩阵。 | 答案：det A = 2 × 3 − 1 × 5 = 1；A⁻¹ = (1/1)[[3, −1], [−5, 2]] = [[3, −1], [−5, 2]]。 |

| # | Question | Answer and marking notes |
|---|---|---|
| 10 | （b）用逆矩阵解上述方程组。 | 答案：[x, y] = $A^{-1}$[7, 18]，x = 3 × 7 − 1 × 18 = 3，y = −5 × 7 + 2 × 18 = 1，故 x = 3、y = 1。 |
| 11 | （c）求行列式 \|1 2 3; 0 1 4; 5 6 0\| 的值。 | 答案：按第一行展开，得 1(1×0 − 4×6) − 2(0×0 − 4×5) + 3(0×6 − 1×5) = −24 + 40 − 15 = 1。 |
| 12 | （d）若某 3 × 3 方阵的行列式为 0，对其对应方程组可下什么结论？ | 答案：该矩阵不存在逆矩阵，方程组没有唯一解，可能无解或有无限多个解，需再比较方程的相容性。 |

## 4. 向量内积、叉积与面积（18 分）

*设向量 a = (3, −1, 2)，b = (1, 4, −2)。*

| # | Question | Answer and marking notes |
|---|---|---|
| 13 | （a）求 a · b。 | 答案：a · b = 3 × 1 + (−1) × 4 + 2 × (−2) = 3 − 4 − 4 = −5。 |
| 14 | （b）求 a 与 b 的夹角，取一位小数。 | 答案：\|a\| = √14 ≈ 3.742、\|b\| = √21 ≈ 4.583，cos θ = −5/√294 ≈ −0.2916，θ ≈ 107.0° 。 |
| 15 | （c）求 a × b。 | 答案：a × b = ((−1)(−2) − 2 × 4, 2 × 1 − 3(−2), 3 × 4 − (−1)(1)) = (−6, 8, 13)。 |
| 16 | （d）求以 a、b 为邻边的平行四边形面积，取两位小数。 | 答案：面积 = \|a × b\| = √(36 + 64 + 169) = √269 ≈ 16.40 平方单位。 |

## 5. 二项分布（16 分）

*某工厂生产的零件不良率为 5%。现随机抽取 20 件，设 X 为不良品数目，X 服从二项分布。*

| # | Question | Answer and marking notes |
|---|---|---|
| 17 | （a）求 P(X = 0)，取小数四位。 | 答案：P(X = 0) = 0.95^20 ≈ 0.3585。 |
| 18 | （b）求 P(X ⩾ 1)，取小数四位。 | 答案：P(X ⩾ 1) = 1 − P(X = 0) = 1 − 0.3585 = 0.6415。 |
| 19 | （c）求 X 的平均值、方差及标准差，标准差取小数四位。 | 答案：平均值 = np = 20 × 0.05 = 1；方差 = np(1 − p) = 1 × 0.95 = 0.95；标准差 = √0.95 ≈ 0.9747。 |
| 20 | （d）求 P(X = 2)，取小数四位。 | 答案：P(X = 2) = C(20, 2)$(0.05)^2(0.95)^{18}$ = 190 × 0.0025 × 0.3972 ≈ 0.1887。 |

## 6. 无盖水箱的表面积最优化（16 分）

*一个无盖长方体水箱，底部为正方形，边长 x 米，容量固定为 32 立方米。设高为 h 米。*

| # | Question | Answer and marking notes |
|---|---|---|
| 21 | （a）以 x 表示 h，并写出表面积 A 的表示式。 | 答案：由 $x^2h$ = 32 得 h = 32/$x^2$；表面积 A = $x^2$ + 4xh = $x^2$ + 128/x（平方米）。 |

| # | Question | Answer and marking notes |
|---|---|---|
| 22 | （b）求使 A 最小的 x 值及对应的 h。 | 答案：$dA/dx = 2x - 128/x^2 = 0$，得 $x^3 = 64$，$x = 4$；$h = 32/16 = 2$ 米。 |
| 23 | （c）验证上述 x 值确实使 A 最小，并求最小表面积。 | 答案：$A'' = 2 + 256/x^3$，当 $x = 4$ 时 $A'' = 2 + 4 = 6 > 0$，故为极小；$A = 16 + 32 = 48$ 平方米。 |
| 24 | （d）若材料每平方米 150 元，求最低表面积下的材料费；若预算 8000 元，余款多少？ | 答案：材料费 $= 48 \times 150 = 7200$ 元；余款 $= 8000 - 7200 = 800$ 元。 |