中六數學延伸部分單元二練習卷

中六　數學（延伸部分單元二）　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

1. 極限與求導技巧（16 分）

設 f(x) = e^(2x) ln x，曲線 C 為 x² + y² = 25，另一函數 g(x) = x³ − 3x。

1. （a）求 lim(x→0) (sin 3x) / x。

答案：答案：當 x→0 時 sin 3x ≈ 3x，故 (sin 3x)/x → 3；亦可寫成 3 × lim(sin 3x)/(3x) = 3 × 1 = 3。

2. （b）求 f′(x)，並求 f′(1) 的準確值。

答案：答案：用積法則，f′(x) = 2e^(2x) ln x + e^(2x)/x；代入 x = 1 得 f′(1) = 2e + e = 3e ≈ 8.15。

3. （c）在 C 上的點 (3, 4)，求 dy/dx。

答案：答案：兩邊對 x 求導得 2x + 2y(dy/dx) = 0，故 dy/dx = −x/y；在 (3, 4) 得 dy/dx = −3/4 = −0.75。

4. （d）求 g(x) 的極大點與極小點，並判別其性質。

答案：答案：g′(x) = 3x² − 3 = 0 得 x = 1 或 x = −1；g″(x) = 6x，g″(1) = 6 > 0 故 x = 1 為極小點，g(1) = −2；g″(−1) = −6 為負數 故 x = −1 為極大點，g(−1) = 2。

2. 積分技巧與旋轉體體積（16 分）

計算以下各項，答案可取小數三位。

5. （a）求 ∫(1→2) (3x² + 2x) dx 的準確值。

答案：答案：原函數為 x³ + x²，代入上下限得 (8 + 4) − (1 + 1) = 10。

6. （b）用分部積分求 ∫(0→1) x e^x dx 的準確值。

答案：答案：令 u = x、dv = e^x dx，則 du = dx、v = e^x；積分 = [x e^x](0→1) − ∫(0→1) e^x dx = e − (e − 1) = 1。

7. （c）用代換法求 ∫(0→1) 2x/(x² + 1) dx，取小數三位。

答案：答案：令 u = x² + 1，du = 2x dx，積分 = ln(x² + 1) 由 0 到 1 = ln 2 − ln 1 = ln 2 ≈ 0.693。

8. （d）曲線 y = √x 由 x = 0 至 x = 4 繞 x 軸旋轉，求旋轉體體積（以 π 表示）。

答案：答案：V = π ∫(0→4) x dx = π[x²/2](0→4) = 8π ≈ 25.133 立方單位。

3. 矩陣與線性方程組（18 分）

設 A = [[2, 1], [5, 3]]，另有方程組 2x + y = 7、5x + 3y = 18。

9. （a）求 det A 及 A 的逆矩陣。

答案：答案：det A = 2 × 3 − 1 × 5 = 1；A⁻¹ = (1/1)[[3, −1], [−5, 2]] = [[3, −1], [−5, 2]]。

10. （b）用逆矩陣解上述方程組。

答案：答案：[x, y] = A⁻¹[7, 18]，x = 3 × 7 − 1 × 18 = 3，y = −5 × 7 + 2 × 18 = 1，故 x = 3、y = 1。

11. （c）求行列式 |1 2 3; 0 1 4; 5 6 0| 的值。

答案：答案：按第一行展開，得 $1(1\times0-4\times6)-2(0\times0-4\times5)+3(0\times6-1\times5)=-24+40-15=1$。

12. （d）若某 3 × 3 方陣的行列式為 0，對其對應方程組可下甚麼結論？

答案：答案：該矩陣不存在逆矩陣，方程組沒有唯一解，可能無解或有無限多個解，需再比較方程的相容性。

4. 向量內積、叉積與面積（18 分）

設向量 $\mathbf{a}=(3,-1,2)$，$\mathbf{b}=(1,4,-2)$。

13. （a）求 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。

答案：答案：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3\times1+(-1)\times4+2\times(-2)=3-4-4=-5$。

14. （b）求 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 的夾角，取一位小數。

答案：答案：$|\mathbf{a}|=\sqrt{14}\approx3.742$、$|\mathbf{b}|=\sqrt{21}\approx4.583$，$\cos\theta=-5/\sqrt{294}\approx-0.2916$，$\theta\approx107.0^\circ$。

15. （c）求 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$。

答案：答案：$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=((-1)(-2)-2\times4,\,2\times1-3(-2),\,3\times4-(-1)(1))=(-6,8,13)$。

16. （d）求以 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 為鄰邊的平行四邊形面積，取兩位小數。

答案：答案：面積 $=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{(36+64+169)}=\sqrt{269}\approx16.40$ 平方單位。

5. 二項分佈（16 分）

某工廠生產的零件不良率為 5%。現隨機抽取 20 件，設 X 為不良品數目，X 服從二項分佈。

17. （a）求 P(X = 0)，取小數四位。

答案：答案：P(X = 0) = 0.95^20 ≈ 0.3585。

18. （b）求 $P(X\geqslant1)$，取小數四位。

答案：答案：$P(X\geqslant1)=1-P(X=0)=1-0.3585=0.6415$。

19. （c）求 X 的平均值、方差及標準差，標準差取小數四位。

答案：答案：平均值 $=np=20\times0.05=1$；方差 $=np(1-p)=1\times0.95=0.95$；標準差 $=\sqrt{0.95}\approx0.9747$。

20. （d）求 P(X = 2)，取小數四位。

答案：答案：$P(X=2)=C(20,2)(0.05)^2(0.95)^{18}=190\times0.0025\times0.3972\approx0.1887$。

6. 無蓋水箱的表面積最優化（16 分）

一個無蓋長方體水箱，底部為正方形，邊長 x 米，容量固定為 32 立方米。設高為 h 米。

21. （a）以 x 表示 h，並寫出表面積 A 的表示式。

答案：答案：由 $x^2h=32$ 得 $h=32/x^2$；表面積 $A=x^2+4xh=x^2+128/x$（平方米）。

22. （b）求使 A 最小的 x 值及對應的 h。

答案：答案：$dA/dx=2x-128/x^2=0$，得 $x^3=64$，$x=4$；$h=32/16=2$ 米。

23. （c）驗證上述 x 值確實使 A 最小，並求最小表面積。

答案：答案：$A'' = 2 + 256/x^3$，當 $x = 4$ 時 $A'' = 2 + 4 = 6 > 0$，故為極小；$A = 16 + 32 = 48$ 平方米。

24. （d）若材料每平方米 150 元，求最低表面積下的材料費；若預算 8000 元，餘款多少？

答案：答案：材料費 $= 48 \times 150 = 7200$ 元；餘款 $= 8000 - 7200 = 800$ 元。

TutorZone 中六數學（延伸部分單元二）練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。