中六数学延伸部分单元二练习卷（第一份）｜极限、求导、积分、矩阵、向量、二项分布、最优化

练习卷 · 高中数学延伸

中六数学延伸部分单元二（M2）练习卷（第一份），按香港高中数学延伸课程编排，适合校内测验及文凭试备试，涵盖极限与求导技巧、隐函数求导与极值判别、积分代换与分部积分、旋转体体积、矩阵与线性方程组、向量内积与叉积、二项分布，以及无盖水箱的表面积最优化，每题附完整答案与步骤，并列出常见失分位。

1. 极限与求导技巧（16 分）

设 $f(x) = e^{2x} \ln x$，曲线 C 为 $x^2 + y^2 = 25$，另一函数 $g(x) = x^3 - 3x$。

#	Question
1	(a) 求 $\lim_{x \to 0} (\sin 3x) / x$。
2	(b) 求 $f'(x)$，并求 $f'(1)$ 的准确值。
3	(c) 在 C 上的点 $(3, 4)$，求 dy/dx。
4	(d) 求 $g(x)$ 的极大点与极小点，并判别其性质。

2. 积分技巧与旋转体体积（16 分）

计算以下各项，答案可取小数三位。

#	Question
5	(a) 求 $\int_1^2 (3x^2 + 2x)\,dx$ 的准确值。
6	(b) 用分部积分求 $\int_0^1 x e^x\,dx$ 的准确值。
7	(c) 用代换法求 $\int_0^1 2x/(x^2 + 1)\,dx$，取小数三位。
8	(d) 曲线 $y = \sqrt{x}$ 由 $x = 0$ 至 $x = 4$ 绕 x 轴旋转，求旋转体体积（以 π 表示）。

3. 矩阵与线性方程组（18 分）

设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$，另有方程组 $2x + y = 7$、$5x + 3y = 18$。

#	Question
9	(a) 求 $\det A$ 及 A 的逆矩阵。
10	(b) 用逆矩阵解上述方程组。
11	(c) 求行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$ 的值。
12	(d) 若某 3×3 方阵的行列式为 0，对其对应方程组可下什么结论？

4. 向量内积、叉积与面积（18 分）

设向量 $a = (3, -1, 2)$，$b = (1, 4, -2)$。

#	Question
13	（a）求 $a \cdot b$。
14	（b）求 a 与 b 的夹角，取一位小数。
15	（c）求 $a \times b$。
16	（d）求以 a、b 为邻边的平行四边形面积，取两位小数。

5. 二项分布（16 分）

某工厂生产的零件不良率为 5%。现随机抽取 20 件，设 X 为不良品数目，X 服从二项分布。

#	Question
17	（a）求 $P(X = 0)$，取小数四位。
18	（b）求 $P(X \geqslant 1)$，取小数四位。
19	（c）求 X 的平均值、方差及标准差，标准差取小数四位。
20	（d）求 $P(X = 2)$，取小数四位。

6. 无盖水箱的表面积最优化（16 分）

一个无盖长方体水箱，底部为正方形，边长 x 米，容量固定为 32 立方米。设高为 h 米。

#	Question
21	（a）以 x 表示 h，并写出表面积 A 的表示式。
22	（b）求使 A 最小的 x 值及对应的 h。
23	（c）验证上述 x 值确实使 A 最小，并求最小表面积。
24	（d）若材料每平方米 150 元，求最低表面积下的材料费；若预算 8000 元，余款多少？