中四數學延伸部分單元二練習卷：數學歸納法、二項式定理、複角三角學與三角方程、向量、矩陣與線性變換、極限導數與積分

中四　數學延伸部分（單元二）　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

第一部分：數學歸納法（15 分）

清楚寫出基礎個案、歸納假設與歸納步驟，缺少任何一步不給滿分。

1. 用數學歸納法證明：對所有正整數 n，$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$。

答案：$n = 1$ 時左邊 $= 1 = 1^2$，成立。設 $n = k$ 成立，即前 k 個奇數之和 $= k^2$。$n = k + 1$ 時，和 $= k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$，故對所有正整數 n 成立。

2. 證明：對所有整數 $n \geqslant 5$，$2^n > n^2$。

答案：$n = 5$ 時，$2^5 = 32 > 25 = 5^2$，成立。設 $2^k > k^2$（$k \geqslant 5$），則 $2^{k+1} = 2 \times 2^k > 2k^2$。又 $2k^2 - (k + 1)^2 = k^2 - 2k - 1 > 0$（$k \geqslant 5$ 時），故 $2^{k+1} > (k + 1)^2$。

3. 證明：對所有正整數 n，$\Sigma(r \times 2^r)$ 由 $r = 1$ 至 n，等於 $(n - 1)2^{n+1} + 2$。

答案：$n = 1$ 時，左邊 $= 2$，右邊 $= 0 + 2 = 2$。設 $n = k$ 成立，則 $n = k + 1$ 時總和 $= (k - 1)2^{k+1} + 2 + (k + 1)2^{k+1} = 2k \times 2^{k+1} + 2 = k \times 2^{k+2} + 2$，符合公式。

4. 證明：對所有正整數 n，$7^n - 1$ 可被 6 整除。

答案：$n = 1$ 時，$7 - 1 = 6$，成立。設 $7^k - 1 = 6M$（M 為整數），則 $7^{k+1} - 1 = 7(6M + 1) - 1 = 42M + 6 = 6(7M + 1)$，亦為 6 的倍數。

第二部分：二項式定理（17 分）

未經指示的展開須逐項化簡，係數須為最簡分數或整數。

5. 展開 $(2x - 3)^4$。

答案：$16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$。

6. 求 $(x^2 + 2/x)^6$ 展開式中 x^6 項的係數。

答案：通項為 $C(6, r)(x^2)^{6-r}(2/x)^r = C(6, r)2^r x^{12-3r}$。令 $12 - 3r = 6$，得 $r = 2$，係數 $= 15 \times 4 = 60$。

7. 求 $(2x - 1/(2x))^8$ 展開式中的常數項。

答案：通項 $= C(8, r)(2x)^{8-r}(-1/(2x))^r = C(8, r)2^{8-2r}(-1)^r x^{8-2r}$。令 $8 - 2r = 0$，$r = 4$，常數項 $= 70 \times 2^0 \times 1 = 70$。

8. 已知 $(1 + kx)^n$ 的展開式中 x 的係數為 24，x^2 的係數為 252，求 n 與 k 的值。

答案：$C(n,1)k = 24$，即 $nk = 24$；$C(n,2)k^2 = 252$，即 $n(n - 1)k^2/2 = 252$。代入 $nk = 24$ 得 $12k(n - 1) = 252$，故 $k(n - 1) = 21$。配合 $nk = 24$ 解得 $n = 8$、$k = 3$。

第三部分：複角三角學與三角方程（17 分）

除特別指明外，角度以度為單位，答案須準確至三位有效數字。

9. 已知 $\sin A = 3/5$、$\cos B = 5/13$，且 A、B 均為銳角，求 $\sin(A + B)$ 的準確值。

答案：$\cos A = 4/5$、$\sin B = 12/13$，故 $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = 15/65 + 48/65 = 63/65$。

10. 解方程 $2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$，其中 $0^\circ \leqslant \theta < 360^\circ$。

答案：因式分解得 $(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1) = 0$，故 $\sin\theta = 1/2$ 或 $\sin\theta = -1$，即 $\theta = 30^\circ$、150° 或 270°。

11. 化簡 $\sin 2\theta / (1 + \cos 2\theta)$，並指出 θ 的取值限制。

答案：$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$、$1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$，故商 $= \tan\theta$；需 $\cos\theta \neq 0$，即 $\theta \neq 90^\circ + 180^\circ n$。

12. 在三角形 ABC 中，$a = 7$、$b = 9$、$C = 60^\circ$。求 c 及三角形面積（答案準確至三位有效數字）。

答案：由餘弦公式 $c^2 = 49 + 81 - 2(7)(9)\cos 60^\circ = 130 - 63 = 67$，故 $c = 8.19$。面積 $= \tfrac{1}{2}(7)(9)\sin 60^\circ = 27.3$。

第四部分：向量（17 分）

向量以坐標表示，若結果為向量須寫成有序數對。

13. 已知 $\mathbf{a} = (3, -1)$、$\mathbf{b} = (-2, 4)$，求 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 及 $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}|$，並寫出與 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 同方向的單位向量。

答案：$2\mathbf{a} - \mathbf{b} = (6 + 2, -2 - 4) = (8, -6)$，$|2\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{(64 + 36)} = 10$，單位向量 $= (0.8, -0.6)$。

14. 已知 $\mathbf{a} = (1, 2)$ 與 $\mathbf{b} = (k, 3)$ 互相垂直，求 k。

答案：垂直條件為內積為零：$1 \times k + 2 \times 3 = 0$，故 $k = -6$。

15. 求向量 $(1, 1)$ 與 $(1, 0)$ 之間的夾角。

答案：$\cos\theta = 1/(\sqrt{2} \times 1) = 1/\sqrt{2}$，故夾角為 45°。

16. 已知 A(1, 2)、B(4, 6)、C(7, 2)，求三角形 ABC 的面積。

答案：$\overrightarrow{AB} = (3, 4)$、$\overrightarrow{AC} = (6, 0)$，面積 $= \tfrac{1}{2}|3 \times 0 - 4 \times 6| = \tfrac{1}{2} \times 24 = 12$ 平方單位。

第五部分：矩陣與線性變換（17 分）

矩陣乘法須清楚顯示運算過程；不可使用計算機的矩陣功能跳步。

17. 設 $A = [[2, 1], [3, 4]]$、$B = [[1, 0], [2, 1]]$，求 AB 與 BA，並由此說明矩陣乘法不滿足交換律。

答案：$AB = [[4, 1], [11, 4]]$，$BA = [[2, 1], [7, 6]]$；兩者不等，故 $AB \neq BA$。

18. 求矩陣 $[[3, 1], [2, 4]]$ 的逆矩陣。

答案：行列式 $= 12 - 2 = 10$，逆矩陣 $= (1/10)[[4, -1], [-2, 3]]$。

19. 用矩陣方法解方程組 $2x + y = 7$、$x - y = 2$。

答案：係數矩陣行列式 $= -2 - 1 = -3$，逆矩陣 $= (-1/3)[[-1, -1], [-1, 2]]$，乘常數向量 $(7, 2)$ 得 $x = 3$、$y = 1$。

20. 矩陣 $M = [[0, -1], [1, 0]]$ 代表把向量逆時針旋轉 90°。求點 $(3, 2)$ 經 M 變換後的像，並寫出 M^2 代表的變換。

答案：$M(3, 2)^{\mathsf{T}} = (-2, 3)^{\mathsf{T}}$，像為 $(-2, 3)$。$M^2 = [[-1, 0], [0, -1]]$，代表繞原點旋轉 180°（即關於原點的點對稱）。

第六部分：極限、導數與積分（17 分）

求極限須寫出化簡步驟；不定積分須加常數 C。

21. 求 $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$。

答案：$\dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$（$x \neq 3$），故極限 $= 6$。

22. 求 $\dfrac{d}{dx}(x^2 \ln x)$。

答案：由乘積法則得 $2x \ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x \ln x + x$。

23. 計算 $\int_1^2 (3x^2 + \dfrac{2}{x})\,dx$，答案以準確值表示。

答案：原函數為 $x^3 + 2\ln x$，代入上下限得 $(8 + 2\ln 2) - 1 = 7 + 2\ln 2 \approx 8.39$。

24. 求曲線 $y = x^3 - 2x$ 在 $x = 1$ 處的切線方程。

答案：$y' = 3x^2 - 2$，在 $x = 1$ 時斜率 $= 1$，切點為 $(1, -1)$，故切線為 $y + 1 = x - 1$，即 $y = x - 2$。

TutorZone 中四數學延伸部分（單元二）練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。