中四数学延伸部分单元二练习卷：数学归纳法、二项式定理、复角三角学与三角方程、向量、矩阵与线性变换、极限导数与积分

中四　数学延伸部分（单元二）　|　时限：75 分钟　|　总分：100 分　|　共 24 题

第一部分：数学归纳法（15 分）

清楚写出基础个案、归纳假设与归纳步骤，缺少任何一步不给满分。

1. 用数学归纳法证明：对所有正整数 n，$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$。

2. 证明：对所有整数 $n \geqslant 5$，$2^n > n^2$。

3. 证明：对所有正整数 n，$\Sigma(r \times 2^r)$ 由 $r = 1$ 至 n，等于 $(n - 1)2^{n+1} + 2$。

4. 证明：对所有正整数 n，$7^n - 1$ 可被 6 整除。

第二部分：二项式定理（17 分）

未经指示的展开须逐项化简，系数须为最简分数或整数。

5. 展开 $(2x - 3)^4$。

6. 求 $(x^2 + 2/x)^6$ 展开式中 x^6 项的系数。

7. 求 $(2x - 1/(2x))^8$ 展开式中的常数项。

8. 已知 $(1 + kx)^n$ 的展开式中 x 的系数为 24，x^2 的系数为 252，求 n 与 k 的值。

第三部分：复角三角学与三角方程（17 分）

除特别指明外，角度以度为单位，答案须准确至三位有效数字。

9. 已知 $\sin A = 3/5$、$\cos B = 5/13$，且 A、B 均为锐角，求 $\sin(A + B)$ 的准确值。

10. 解方程 $2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$，其中 $0^\circ \leqslant \theta < 360^\circ$。

11. 化简 $\sin 2\theta / (1 + \cos 2\theta)$，并指出 θ 的取值限制。

12. 在三角形 ABC 中，$a = 7$、$b = 9$、$C = 60^\circ$。求 c 及三角形面积（答案准确至三位有效数字）。

第四部分：向量（17 分）

向量以坐标表示，若结果为向量须写成有序数对。

13. 已知 $\mathbf{a} = (3, -1)$、$\mathbf{b} = (-2, 4)$，求 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 及 $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}|$，并写出与 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 同方向的单位向量。

14. 已知 $\mathbf{a} = (1, 2)$ 与 $\mathbf{b} = (k, 3)$ 互相垂直，求 k。

15. 求向量 (1, 1) 与 (1, 0) 之间的夹角。

16. 已知 A(1, 2)、B(4, 6)、C(7, 2)，求三角形 ABC 的面积。

第五部分：矩阵与线性变换（17 分）

矩阵乘法须清楚显示运算过程；不可使用计算机的矩阵功能跳步。

17. 设 A = [[2, 1], [3, 4]]、B = [[1, 0], [2, 1]]，求 AB 与 BA，并由此说明矩阵乘法不满足交换律。

18. 求矩阵 [[3, 1], [2, 4]] 的逆矩阵。

19. 用矩阵方法解方程组 $2x + y = 7$、$x - y = 2$。

20. 矩阵 M = [[0, −1], [1, 0]] 代表把向量逆时针旋转 90° 。求点 (3, 2) 经 M 变换后的像，并写出 M^2 代表的变换。

第六部分：极限、导数与积分（17 分）

求极限须写出化简步骤；不定积分须加常数 C。

21. 求 $\lim_{x \to 3} (x^2 - 9)/(x - 3)$。

22. 求 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x\,(x^2 \ln x)$。

23. 计算 $\int$（由 1 至 2）$(3x^2 + 2/x)\,\mathrm{d}x$，答案以准确值表示。

24. 求曲线 $y = x^3 - 2x$ 在 $x = 1$ 处的切线方程。

TutorZone 中四数学延伸部分（单元二）练习卷｜题目与文章为原创，并非任何学校或出版社的教材。