中四數學延伸部分單元二練習卷：數學歸納法、二項式定理、複角三角學與三角方程、向量、矩陣與線性變換、極限導數與積分

中四　數學延伸部分（單元二）　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

第一部分：數學歸納法（15 分）

清楚寫出基礎個案、歸納假設與歸納步驟，缺少任何一步不給滿分。

1. 用數學歸納法證明：對所有正整數 n，$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$。

2. 證明：對所有整數 $n \geqslant 5$，$2^n > n^2$。

3. 證明：對所有正整數 n，$\Sigma(r \times 2^r)$ 由 $r = 1$ 至 n，等於 $(n - 1)2^{n+1} + 2$。

4. 證明：對所有正整數 n，$7^n - 1$ 可被 6 整除。

第二部分：二項式定理（17 分）

未經指示的展開須逐項化簡，係數須為最簡分數或整數。

5. 展開 $(2x - 3)^4$。

6. 求 $(x^2 + 2/x)^6$ 展開式中 x^6 項的係數。

7. 求 $(2x - 1/(2x))^8$ 展開式中的常數項。

8. 已知 $(1 + kx)^n$ 的展開式中 x 的係數為 24，x^2 的係數為 252，求 n 與 k 的值。

第三部分：複角三角學與三角方程（17 分）

除特別指明外，角度以度為單位，答案須準確至三位有效數字。

9. 已知 $\sin A = 3/5$、$\cos B = 5/13$，且 A、B 均為銳角，求 $\sin(A + B)$ 的準確值。

10. 解方程 $2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$，其中 $0^\circ \leqslant \theta < 360^\circ$。

11. 化簡 $\sin 2\theta \,/\, (1 + \cos 2\theta)$，並指出 θ 的取值限制。

12. 在三角形 ABC 中，$a = 7$、$b = 9$、$C = 60^\circ$。求 c 及三角形面積（答案準確至三位有效數字）。

第四部分：向量（17 分）

向量以坐標表示，若結果為向量須寫成有序數對。

13. 已知 $\mathbf{a} = (3, -1)$、$\mathbf{b} = (-2, 4)$，求 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 及 $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}|$，並寫出與 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 同方向的單位向量。

14. 已知 $\mathbf{a} = (1, 2)$ 與 $\mathbf{b} = (k, 3)$ 互相垂直，求 k。

15. 求向量 (1, 1) 與 (1, 0) 之間的夾角。

16. 已知 A(1, 2)、B(4, 6)、C(7, 2)，求三角形 ABC 的面積。

第五部分：矩陣與線性變換（17 分）

矩陣乘法須清楚顯示運算過程；不可使用計算機的矩陣功能跳步。

17. 設 A = [[2, 1], [3, 4]]、B = [[1, 0], [2, 1]]，求 AB 與 BA，並由此說明矩陣乘法不滿足交換律。

18. 求矩陣 [[3, 1], [2, 4]] 的逆矩陣。

19. 用矩陣方法解方程組 $2x + y = 7$、$x - y = 2$。

20. 矩陣 M = [[0, −1], [1, 0]] 代表把向量逆時針旋轉 90° 。求點 (3, 2) 經 M 變換後的像，並寫出 M^2 代表的變換。

第六部分：極限、導數與積分（17 分）

求極限須寫出化簡步驟；不定積分須加常數 C。

21. 求 $\lim_{x \to 3} (x^2 - 9)/(x - 3)$。

22. 求 $\frac{d}{dx}(x^2 \ln x)$。

23. 計算 $\int$（由 1 至 2）$(3x^2 + 2/x)\,dx$，答案以準確值表示。

24. 求曲線 $y = x^3 - 2x$ 在 $x = 1$ 處的切線方程。

TutorZone 中四數學延伸部分（單元二）練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。